Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 10, с. 894 – 907 © 2026 г. 25 ноября

Флуктуации силы и работы в ланжевеновской динамике частиц в переменном потенциале

Г. Буторин[+], *С. Белан*[*×1)]

[+]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[×]*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, факультет физики, 101000 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 августа 2026 г.
После переработки 21 октября 2026 г.
Принята к публикации 21 октября 2026 г.

Процессы совершения работы по перемещению частиц малого размера в среде с белым шумом (термостате) описываются теоремами стохастической термодинамики, такими как соотношение Ярзинского и флуктуационная теорема Крукса. Эти теоретические результаты основаны на моделях ланжевеновской кинетики частиц в равновесном термостате, свойства которого не зависят от внешней силы. Широкая применимость выводов, предлагаемых стохастической термодинамикой, связана с тем фактом, что многие из них непертурбативны относительно амплитуды внешней силы и справедливы для любой длительности наблюдения. На основе флуктуационных теорем и решений уравнений Ланжевена и Фоккера–Планка в линейных моделях мы исследуем статистику силы и работы в процессах транспорта частиц в переменных потенциалах и непотенциальных полях сил в присутствии белого шума. Анализ выявляет условия, при которых флуктуации работы малы в сравнении со средним значением, так что подверженный влиянию шума рабочий процесс может рассматриваться как хорошо контролируемый. Помимо этого, получено соотношение между средним квадратом флуктуаций силы, приложенной к частицам в потенциале с равномерно движущимся профилем, и временем корреляции этих флуктуаций, показывающее, что произведение этих двух величин не зависит от деталей рабочего протокола.

DOI: 10.7868/S3034576626110269

I. Введение. Уравнение Ланжевена – это модель стохастической динамики частиц в окружении с шумом, применимая, когда время корреляции случайного шума мало в сравнении с другими масштабами времени, характеризующими рассматриваемую систему [1]. Процессы совершения работы в ланжевеновской кинетике в режиме сильного трения, рассматриваемые в области стохастической термодинамики [2], удовлетворяют соотношениям на термодинамические величины (производство энтропии, работа, потоки частиц и т.д.), известным как флуктуационные теоремы [2–10], которые устойчивы по отношению к изменению многих деталей системы, таких как профили совершающих работу потенциальных и непотенциальных сил, конкретный вид зависящего от времени протокола воздействия на частицу, длительность рабочего процесса, число частиц в системе, время релаксации системы. В этой работе мы рассматриваем процесс перемещения частиц движущимся профилем ограничивающего потенциала. Для такого процесса, как известно, выполняется равенство Ярзинского и, в случае гармонического потенциала, флуктуационная теорема Крукса [10–13]. Анализ описывает соотношение, связывающее характерную амплитуду флуктуаций и время корреляции силы, действующей на частицы со стороны потенциала. Помимо статистических свойств силы, другой рассматриваемый здесь вопрос – определение условий, при которых относительная флуктуация стохастической работы, совершаемой в процессе перемещения частиц, мала.

Рассмотрим N одинаковых невзаимодействующих частиц подвижности μ в одномерном ограничивающем потенциале $U_0(x)$. В присутствии шума характеристики рабочего процесса, такие как сила, приложенная к частицам, совершаемая работа, начальная и конечная конфигурации системы, траектория системы и т.д., флуктуируют и являются предметом статистического описания. Начальное статистическое состояние системы предполагается равновесным и, следовательно, описывается распределением Больцмана $P_0(\mathbf{X}) = C\exp(-\sum_{i=1}^{N}\frac{U_0(x_i)}{k_BT})$, где

[1)]e-mail: sergb27@yandex.ru

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$ обозначает набор координат частиц, T – температура термостата, k_B – константа Больцмана и $C = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\frac{U_0(x)}{k_B T})\right)^{-N}$ – числовой множитель, определяемый условием нормировки функции плотности вероятности $P(\mathbf{X})$.

В момент $t = 0$ минимум потенциала начинает двигаться, при этом форма потенциала остается неизменной. Положение минимума как функция от времени будет обозначаться как $\lambda(t)$. Таким образом, результирующий переменный потенциал имеет вид

$$U(x,t) = U_0(x - \lambda(t)). \tag{1}$$

Мы будем в основном рассматривать случай постоянной скорости

$$\lambda(t) = vt, \tag{2}$$

см. рис. 1.

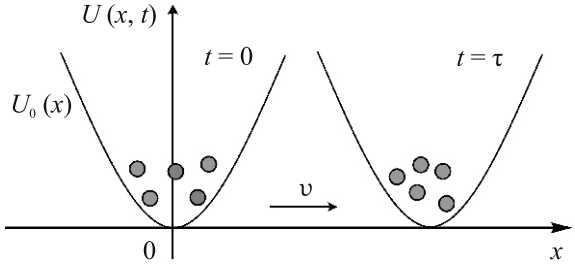

Рис. 1. Частицы под действием случайного шума, перемещаемые в вязкой среде потенциальной силой, профиль потенциала которой движется с постоянной скоростью v. Форма потенциала остается неизменной в ходе рабочего процесса. Стохастическая работа, совершаемая над частицами за интервал времени τ, дается выражением (7) и удовлетворяет соотношению Ярзинского (14)

На масштабах времени $\gg \tau_{St}$ и масштабах длины $\gg \sqrt{D\tau_{St}}$, где τ_{St} – время корреляции скорости частицы (время Стокса), и $D = \mu k_B T$ – это коэффициент диффузии, динамика частиц может быть промоделирована при помощи уравнения Ланжевена в режиме сильного трения

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mu \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), t) + \xi(t), \tag{3}$$

где

$$f_i(\mathbf{X}, t) = -\partial_{x_i} U(x_i, t), \tag{4}$$

это потенциальная сила, действующая на i-ю частицу, $\xi(t)$ – Гауссов белый шум с нулевым средним значением компонент,

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \tag{5}$$

и парной корреляционной функцией вида

$$\langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = 2\delta_{ij} \mu k_B T \delta(t_2 - t_1). \tag{6}$$

Стохастическая работа W_τ, совершаемая переменным потенциалом $U(x,t)$ в течение интервала времени τ, дается выражением

$$W_\tau = \sum_{i=1}^{N} \int_0^\tau dt \frac{\partial U(x_i(t), t)}{\partial t}, \tag{7}$$

в котором $x(t)$ – это стохастическая траектория i-й частицы для заданной реализации шума $\xi_i(t)$ и заданной начальной координаты $x_i(0) = x_{i0}$.

Перепишем уравнение Ланжевена (3) в системе отсчета, движущейся со скоростью профиля потенциала. Получаем

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mu \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}(t)) - \dot{\mathbf{\Lambda}}(t) + \xi(t). \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T = \mathbf{X} - \mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}(t) = (vt, vt, \ldots, vt)^T$ и $\mathbf{f}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, 0)$ (см. ур. (4)). Совершая усреднение по статистике шума в ур. (8), мы находим

$$\langle \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}) \rangle = \frac{\dot{\mathbf{\Lambda}}}{\mu}, \tag{9}$$

для достаточно длительных рабочих процессов, таких что $\tau \gg \tau_r$, где τ_r – это время релаксации распределения вероятностей координат частиц $P(\mathbf{Y}; t)$ к стационарному профилю $P_{st}(\mathbf{Y}) = C' \exp(-\sum_{i=1}^{N} \frac{U_{\text{eff}}(y_i)}{k_B T})$ (с эффективным потенциалом $U_{\text{eff}}(y) = U_0(y) + \frac{v}{\mu} y$ и $C' = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-\frac{U_{\text{eff}}(y)}{k_B T})\right)^{-N}$) в движущейся системе отсчета. В самом деле, $\langle \xi(t) \rangle = 0$ (благодаря предполагаемым свойствам шума) и $\langle \dot{\mathbf{Y}}(t) \rangle = 0$ в статистически стационарном режиме. Используя (9), можно переписать (8) как

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mu \delta \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}(t)) + \xi(t), \tag{10}$$

где

$$\delta \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}(t)) = \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}(t)) - \langle \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}(t)) \rangle, \tag{11}$$

это флуктуирующая часть вектора силы $\mathbf{f}$, входящая в уравнение Ланжевена (8) (или (3)).

Поскольку $\partial_t U(x_i(t), t) = \partial_t U_0(x_i(t) - \lambda(t)) = -\dot{\lambda} \partial_{x_i} U_0(x_i(t) - \lambda(t)) = v f_{0i}(y_i(t))$ (см. ур. (1) и (4)), то стохастическая работа, заданная уравнением (7), может быть также представлена как

$$W_\tau = v \int_0^\tau F(\mathbf{Y}(t)) dt, \tag{12}$$

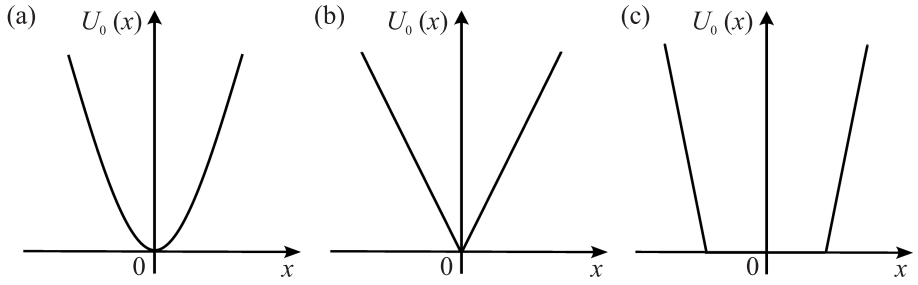

Рис. 2. Параболический, конический и потенциал типа "коробка". Типичная амплитуда и время корреляции флуктуаций силы в рабочем процессе даются ур. (30), (31), (33), (35), (36) и (37)

где

$$F(\mathbf{Y}(t)) = \sum_{i=1}^{N} f_{i0}(y_i(t)), \tag{13}$$

это полная сила, приложенная к системе из N частиц.

В процессах с произвольным профилем потенциала $U_0(x)$, произвольной переменной скоростью его движения $\dot{\lambda}(t)$ и произвольной длительностью процесса $\tau \gg \tau_{St}$ статистика стохастической работы W_τ удовлетворяет соотношению Ярзинского [2, 5–7, 10]:

$$\left\langle \exp\left[-\frac{W_\tau}{k_B T}\right]\right\rangle = 1. \tag{14}$$

Более общая форма соотношения Ярзинского имеет вид $\left\langle \exp\left[-\frac{W_\tau}{k_B T}\right]\right\rangle = e^{-\frac{\Delta\mathcal{F}}{k_B T}}$, где $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(\tau) - \mathcal{F}(0)$ – это разница в свободной энергии, $\mathcal{F} = -k_B T \ln \int d^N\mathbf{X} e^{-\frac{U(x,t)}{k_B T}}$, между равновесными статистическими состояниями частиц, соответствующими начальной и конечной форме потенциала. Поскольку сдвиг потенциала при постоянстве его формы не влечет за собой изменения свободной энергии, для рассматриваемой в этой статье модели справедлива более простая версия (14) (см. также Приложение A).

Далее мы будем использовать соотношение (14) для анализа некоторых статистических свойств силы F и стохастической работы W_τ. Более конкретно, мы рассматриваем характерную амплитуду флуктуаций $\sqrt{\langle \delta F^2\rangle} = \sqrt{\langle F^2(\mathbf{Y}(t))\rangle - \langle F(\mathbf{Y}(t))\rangle^2}$ и время корреляции $\tau_{\rm cor}$ силы F. Кроме того, ниже описаны режимы, в которых относительная флуктуация стохастической работы мала, $\sqrt{\langle W_\tau^2\rangle - \langle W_\tau\rangle^2}/\langle W_\tau\rangle \ll 1$.

II. Соотношение между амплитудой и временем корреляции флуктуаций силы. Предположим, что профиль потенциала движется с постоянной скоростью v, см. рис. 2. Если длительность рабочего процесса τ достаточно велика, то функция распределения плотности вероятности координат частиц успевает отрелаксировать к стационарной (в системе отсчета, движущейся вместе с потенциалом) форме. Сила F, приложенная к частицам со стороны потенциала, тогда представляет собой случайную функцию времени со стационарной статистикой. Вводя время корреляции флуктуаций силы как

$$\tau_{\rm cor} = \frac{\int_0^\infty C(t)dt}{C(0)}, \tag{15}$$

где

$$C(|t_2 - t_1|) = \langle \delta F(\mathbf{Y}(t_1))\delta F(\mathbf{Y}(t_2))\rangle = \tag{16}$$

$$= N\langle \delta f_0(y(t_1))\delta f_0(y(t_2))\rangle, \tag{17}$$

это парная корреляционная функция флуктуаций (заметим, что $\delta f_0(y(t))$ – флуктуация силы, испытываемая отдельной частицей, см. ур. (11) и (30)), мы можем представить стохастическую работу W_τ, определенную уравнением (7), как сумму независимых случайных слагаемых

$$W_\tau = \sum_{i=0}^{\tau/\Delta t - 1} w_i, \tag{18}$$

где $w_i = v\sum_{i=1}^{N}\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} f_{0i}(Y_i(t))dt = v\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} F(\mathbf{Y}(t))dt$ соответствует вкладу i-го интервала времени достаточно малой длительности $\Delta t \ll \tau$, которая тем не менее достаточно велика, $\Delta t \gg \tau_{\rm cor}$, так что различные слагаемые суммы статистически независимы друг от друга: $\langle \delta f_0(y(t_1))\delta f_0(y(t_2))\rangle = 0$, где t_1 и t_2 принадлежат различным интервалам. Стохастическая работа W_τ тогда приблизительно нормально распределена, а соответствующие среднее значение и дисперсия связаны соотношением

$$\sigma^2(W_\tau) = 2\langle W_\tau\rangle k_B T, \tag{19}$$

как следует из равенства Ярзинского (14). Примечательно, нормальная функция плотности вероятности $p(W_\tau)$, для которой оказывается выполненным соотношение (19), является примером статистического распределения, удовлетворяющего флуктуационной теореме Крукса [8, 9]

$$p(-W_\tau) = p(W_\tau)e^{-\frac{W_\tau}{k_BT}}. \tag{20}$$

Заметим также, что свойство (20) влечет за собой справедливость соотношения (14) (но не наоборот).

Для среднего значения и дисперсии стохастической работы мы получаем из ур. (2), (9), (30) и (18) следующие результаты

$$\langle W_\tau\rangle = v\sum_{k=1}^{N}\int_0^\tau \langle f_{0k}(y(t))\rangle dt = N\frac{v^2}{\mu}\tau, \tag{21}$$

и

$$\langle (W_\tau - \langle W_\tau\rangle)^2\rangle = \tag{22}$$

$$= v^2\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\int_0^\tau\int_0^\tau \langle \delta f_{0k}(y(t_1))\delta f_{0l}(y(t_2))\rangle dt_1dt_2 = \tag{23}$$

$$= v^2N\int_0^\tau\int_0^\tau \langle \delta f_0(y(t_1))\delta f_0(y(t_2))\rangle dt_1dt_2 = \tag{24}$$

$$= v^2N\sum_{i=1}^{\tau/\Delta t}\int_{t_i}^{t_i+\Delta t}\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \langle \delta f_0(y(t_1))\delta f_0(y(t_2))\rangle dt_1dt_2 = \tag{25}$$

$$= v^2\frac{\tau}{\Delta t}dt_2\int_{t_i}^{t_i+\Delta t}\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} dt_1C(|t_2-t_1|) \approx \tag{26}$$

$$\approx 2v^2\frac{\tau}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}dT\int_0^\infty dtC(t) = 2v^2\tau\int_0^\infty dtC(t) = \tag{27}$$

$$= 2v^2\tau\tau_{\rm cor}\langle\delta F^2\rangle. \tag{28}$$

Мы учли, что $C(0) = \langle\delta F^2\rangle = N\langle\delta f_0^2\rangle$ в соответствии с определением (16). Уравнения (19), (21) и (28) тогда дают

$$\langle\delta F^2\rangle\tau_{\rm cor} = N\frac{k_BT}{\mu}. \tag{29}$$

Вывод ур. (29) основан на предлположении, что флуктуации силы представляют собой (i) стационарный процесс с (ii) достаточно быстрым затуханием корреляций и (iii) нормальной статистикой в пределе большого значения τ.

В качестве простого примера рассмотрим частицу в гармоническом потенциале с жесткостью k, движущуюся с постоянной скоростью v, так что $U(x,t) = k(x-vt)^2/2$. На основе решения уравнения Ланжевена (10) можно путем аналитических вычислений проверить, что средний квадрат флуктуаций силы и их время корреляции даются выражениями

$$\langle\delta f_0^2\rangle = kk_BT, \tag{30}$$

и

$$\tau_{\rm cor} = \frac{1}{\mu k}, \tag{31}$$

так что соотношение (29) выполнено.

Для негармонических потенциалов аналитические выражения для амплитуды флуктуаций силы могут быть получены в случае кусочно-линейных профилей, рис. 2b и c. А именно, для конического профиля

$$U_0(x) = r|x|, \tag{32}$$

где $r > 0$, средний квадрат флуктуаций силы, рассчитываемый по стационарному распределению вероятности координаты частицы в движущейся системе отсчета, $P_{st}(y) = C'\exp(-\frac{U_0(y)+vy/\mu}{k_BT})$ (как следует из уравнения Фоккера–Планка), дается выражением

$$\langle\delta f_0^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}dyP_{st}(y)(f_0(y)-\langle f_0(y)\rangle)^2 = \tag{33}$$

$$= r^2 - \left(\frac{v}{\mu}\right)^2. \tag{34}$$

Соотношение (30) позволяет оценить $\tau_{\rm cor}$ на основе известного значения $\sqrt{\langle\delta f_0^2\rangle}$:

$$\tau_{\rm cor} = \frac{k_BT}{\mu\langle\delta f_0^2\rangle} = \frac{k_BT}{\mu(r^2-(\frac{v}{\mu})^2)}. \tag{35}$$

Похожим образом, для потенциала

$$U_0(x) = \begin{cases} -r(x+c), \text{ если } x < -c, \\ 0, \text{ если } -c < x < c, \\ r(x-c), \text{ если } c < x, \end{cases}$$

с $r > 0$, из стационарного распределения координаты частицы в движущейся системе отсчета находим

$$\langle\delta f_0^2\rangle = \frac{\cosh(\phi)h(r^2-h^2)}{r\sinh(\phi)+h\cosh(\phi)}, \tag{36}$$

и, используя ур. (30), получаем следующую оценку для времени корреляции

$$\tau_{\rm cor} = \frac{r\sinh(\phi)+h\cosh(\phi)}{\cosh(\phi)h(r^2-h^2)}\frac{k_BT}{\mu}, \tag{37}$$

где $h = \frac{v}{\mu}$ и $\phi = \frac{hc}{k_B T}$. Мы видим, что для негармонических потенциалов как $\langle \delta f_0^2 \rangle$, так и $\tau_{\rm cor}$, зависят от скорости v, несмотря на то, что v не входит в соотношение (29). Выражения (33), (35), (36) и (37) справедливы для достаточно малых значений скорости $v \leq \mu r$, так как в противном случае эффективный потенциал $U_{\rm eff}(y) = U_0(y) + \frac{v}{\mu} y$ в движущейся системе отсчета не является ограничивающим и стационарное распределение $P_{st}(y)$ не устанавливается.

Из уравнений (30), (33) и (36) следует, что при фиксированных скорости v, подвижности μ и температуре T, увеличение жесткости потенциала влечет за собой возрастание амплитуды флуктуаций силы как в абсолютном значении $\sqrt{\langle \delta f_0^2 \rangle}$, так и относительно среднего $\langle f_0 \rangle$ (см. ур. (9)). С учетом соотношения (29), это также означает, что более жесткие потенциалы характеризуются меньшим временем корреляции $\tau_{\rm cor}$ флуктуаций силы.

III. Относительная флуктуация стохастической работы. Рассмотрим частицу в гармоническом потенциале $U_0(x) = kx^2/2$, профиль которого начинает движение в момент $t = 0$ со скоростью v. Если исходная координата частицы принадлежит статистически равновесному ансамблю, то функция плотности вероятности стохастической работы W_τ гауссова для процесса любой длительности τ со средним значением

$$\langle W_\tau \rangle = \frac{v^2}{\mu^2 k}(e^{-\mu k \tau} + \mu k \tau - 1), \tag{38}$$

и среднеквадратичным отклонением

$$\sigma^2(W_\tau) = \frac{2 v^2 k_B T}{\mu^2 k}(e^{-\mu k \tau} + \mu k \tau - 1), \tag{39}$$

см., например, [11], так что относительная флуктуация дается выражением (см. рис. 3)

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle} = \frac{\sqrt{\gamma_\tau}\,{\rm Pe}_\tau}{\sqrt{e^{-\gamma_\tau} - 1 + \gamma_\tau}}, \tag{40}$$

где

$${\rm Pe}_\tau = \frac{\sqrt{2D\tau}}{v\tau}, \tag{41}$$

это число Пекле, численно характеризующее в безразмерной форме относительную роль шума и детерминированного переноса на масштабе времени τ, и

$$\gamma_\tau = \frac{\tau}{\tau_{eq}}, \tag{42}$$

это безразмерная степень стационарности, определенная как отношение длительности рабочего процесса τ к времени релаксации частицы $\tau_{eq} = (\mu k)^{-1}$ в исходном (неподвижном) профиле потенциала.

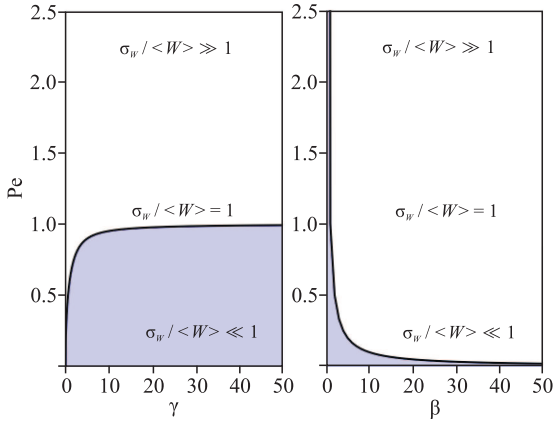

Рис. 3. (Цветной онлайн) Слева: диаграмма в плоскости безразмерных параметров $\gamma_\tau = \mu k \tau$ и ${\rm Pe} = \sqrt{2D\tau}/(v\tau)$, изображающая области $\sigma(W_\tau)/\langle W_\tau \rangle > 1$ и $\sigma(W_\tau)/\langle W_\tau \rangle < 1$ (см. ур. (40)) для относительной флуктуации работы, совершаемой над частицей в процессе, где профиль гармонического потенциала жесткости k перемещается с постоянной скоростью v в течение интервала времени τ. Начальная координата частицы имеет статистически равновесное распределение. Справа: диаграмма для $\sigma(W_\tau)/\langle W_\tau \rangle$ в плоскости безразмерных параметров $\beta = \frac{|\langle \dot\lambda \rangle_\tau|}{\sqrt{\langle \dot\lambda^2 \rangle_\tau}}$ и ${\rm Pe} = \frac{\sqrt{2D\tau}}{|\langle \dot\lambda \rangle_\tau|}$ для случая потенциала с произвольным профилем, движущегося с относительно медленно меняющейся скоростью $\dot\lambda(t)$, см. ур. (44)

Понятно, что флуктуации значения W_τ связаны с обусловленной влиянием шума статистической дисперсией траекторий частиц в рабочем процессе по их перемещению. В согласии с этим ур. (40) показывает, что малость относительной флуктуации подразумевает достаточно малое значение числа Пекле. Для медленного рабочего процесса, $\gamma_\tau \gg 1$, флуктуации работы малы, $\sigma(W_\tau)/\langle W_\tau \rangle \ll 1$, где ${\rm Pe}(\tau) \ll 1$. Для быстрых процессов, $\gamma_\tau \lesssim 1$, получаем $\sigma(W_\tau)/\langle W_\tau \rangle \ll \ll 1$ при ${\rm Pe}(\tau) \ll \sqrt{\gamma_\tau}$.

Более общо, может быть получено точное аналитическое выражение для относительной флуктуации стохастической работы W_τ в процессе длительности τ с произвольным протоколом $\lambda(t)$ ([12] и Приложение B)

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{k \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dot\lambda(t_1)\dot\lambda(t_2) e^{\mu k (t_2 - t_1)}}}. \tag{43}$$

Уравнение (43) справедливо для любой длительности τ рабочего процесса, если распределение начальных координат частиц при $t = 0$ статистически равновесное для гармонического потенциала

$U_0(x) = kx^2/2$. Плотность вероятности $p(W_\tau)$ работы W_τ гауссова и удовлетворяет соотношению Ярзинского (14) и теореме Крукса (20), как следует из линейности зависимости W_τ от реализации случайного процесса $\xi(t)$ и из ур. (B.4) и (B.6) (Приложение B). Для $\dot\lambda(t) = v = \text{const}$, ур. (43) сводится к ур. (40).

За рамками модели с гармоническим потенциалом и предположения о постоянстве скорости перемещения профиля потенциала, приближенное аналитическое выражение для относительной флуктуации работы может быть получено, если имеет место разделение масштабов времени. А именно, как следует из ур. (19) и (21), если длительность рабочего процесса, τ, и типичный масштаб времени, на котором существенно меняется скорость, $\lambda(t)/\dot\lambda(t)$, велики в сравнении с временем релаксации распределения вероятности координаты частицы в движущейся системе отсчета, τ_r, то относительная флуктуация стохастической работы дается выражением

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau\rangle} \approx \sqrt{\frac{2\mu k_B T}{\langle\dot\lambda^2\rangle_\tau \tau}} = \beta_\tau \mathrm{Pe}_\tau, \tag{44}$$

где мы предположили, что статистика работы W_τ приближенно гауссова в пределе большой длительности процесса, τ. Здесь

$$\beta_\tau = \frac{|\langle\dot\lambda\rangle_\tau|}{\sqrt{\langle\dot\lambda^2\rangle_\tau}}, \tag{45}$$

и

$$\mathrm{Pe}_\tau = \frac{\sqrt{2D\tau}}{|\langle\dot\lambda\rangle_\tau|}, \tag{46}$$

с $\langle\dot\lambda\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\dot\lambda(t)$ и $\langle\dot\lambda^2\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\dot\lambda^2(t)$, обозначающими усредненные по времени значения функций $\dot\lambda(t)$ и $\dot\lambda^2(t)$ соответственно. Снова видим, что относительно малые флуктуации работы предполагают достаточно малое значение числа Пекле Pe_τ. Заметим, что $\beta_\tau \le 1$ в силу неравенства Коши, причем $\beta_\tau = 1$, когда скорость перемещения постоянна, $\dot\lambda(t) = v = \text{const}$, и $\beta_\tau \ll 1$ для крайне перемежаемых рабочих протоколов $\dot\lambda(t)$. Уравнение (43) сводится к (44) в предположении о разделении масштабов времени $\tau, \lambda(t)/\dot\lambda(t) \gg \tau_r$.

A. Пример 1. Далее мы сравниваем статистические свойства работы в нескольких моделях с непотенциальными силами. Динамика частицы подвижности μ в режиме сильного трения на окружности радиуса R под действием постоянной силы f и шума $\xi(t)$ описывается уравнением

$$R\dot\varphi(t) = \mu f + \xi(t), \tag{47}$$

где φ – это угловая переменная, задающая положение частицы. Работа, совершаемая над частицей силой f за время τ является линейным функционалом шума $\xi(t)$, $W_\tau = \mu f^2\tau + f\int_0^\tau \xi_x(t)dt$, и не зависит от начальной координаты частицы, и, следовательно, статистика работы гауссова для любого распределения начальной координаты $\varphi(0)$ и любой длительности процесса τ. Соответствующее среднее значение работы W_τ равно

$$\langle W_\tau\rangle = \mu f^2\tau, \tag{48}$$

а для дисперсии мы находим

$$\sigma^2(\tau) = 2Df^2\tau, \tag{49}$$

так что относительная флуктуация равна числу Пекле

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau\rangle} = \frac{\sqrt{2D}}{\mu f\sqrt{\tau}} = \mathrm{Pe}_\tau. \tag{50}$$

Похожим образом, для частицы в движущемся потенциале относительная флуктуация пропорциональна Pe_τ, см. ур. (40).

Заметим также, что нормальная статистика, параметризуемая средним значением (48) и дисперсией (49), удовлетворяет равенству Ярзинского (14) и теореме Крукса (20). Этот вывод также может быть получен при помощи понятия диссипационной функции Ω (см. Приложение D), которая для частицы на окружности и в двух других примерах, обсуждаемых ниже, оказывается в точности равной работе W_τ непотенциальной силы. Диссипационная функция Ω – это функционал траектории ланжевеновской системы, построенный таким образом, что он удовлетворяет равенствам (14) и (20).

B. Пример 2. Теперь рассмотрим двумерное движение частицы с подвижностью μ и коэффициентом диффузии D в постоянном гармоническом потенциале $U(x,y) = ky^2/2$ и постоянном пространственно неоднородном поле непотенциальной силы

$$f_x = \alpha y, \quad f_y = 0, \tag{51}$$

см. рис. 4b. В режиме сильного трения динамика частицы описывается уравнениями

$$\dot x = \alpha\mu y + \xi_x, \tag{52}$$

$$\dot y = -\mu k y + \xi_y. \tag{53}$$

Среднее значение стохастической работы $W_\tau = \alpha\int_0^\tau dty(t)(\alpha\mu y(t) + \xi_x(t))$ в пределе большого τ равно

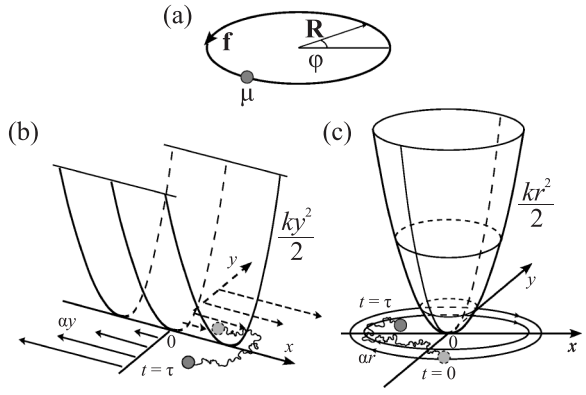

Рис. 4. Частица с подвижностью μ и коэффициентом диффузии D в стационарных полях сил с непотенциальными вкладами: (a) – постоянная сила f на окружности радиуса R; (b) – двумерное движение в суперпозиции гармонического потенциала, $U(y) = ky^2/2$, и поля непотенциальной силы $\mathbf{f} = (\alpha y, -\alpha x)^T$; (c) – двумерное движение в гармоническом потенциале, $U(x,y) = k(x^2+y^2)/2$, в присутствии непотенциальной силы $\mathbf{f} = (\alpha y, 0)^T$. Во всех этих примерах статистика работы, совершаемой над частицей непотенциальной силой, удовлетворяет соотношению Ярзинского (14) и теореме Крукса (20), если начальная координата частицы выбирается из определенного статистического ансамбля (см. Приложение D)

$$\langle W_\tau \rangle = \frac{\alpha^2 D}{k}\tau, \tag{54}$$

см. Приложение D. Заметим, что в отличие от предыдущих моделей среднее значение в ур. (62) зависит от D (см. ур. (38) и (48)). Это связано с тем, что как амплитуда действующей на частицу непотенциальной силы, так и ее смещение в направлении этой силы за малый интервал времени (линейно) зависят от y. В статистически стационарном режиме средний квадрат расстояния $\langle y^2 \rangle$ частицы до минимума гармонического потенциала пропорционален интенсивности шума D.

Далее, дисперсия стохастической работы за интервал наблюдения $\tau \gg (\mu k)^{-1}$ дается формулой

$$\sigma^2(W_\tau) = \frac{2D^2\alpha^4}{k^3\mu}\tau + \frac{2D^2\alpha^2}{\mu k}\tau. \tag{55}$$

(см. Приложение D). Уравнения (54) и (55) показывают, что относительная флуктуация не зависит от коэффициента диффузии частицы:

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle}|_{\gamma_\tau \gg 1} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_\tau}(1 + \frac{k^2}{\alpha^2})}. \tag{56}$$

Помимо вычисления среднего значения и дисперсии, можно показать, что функция плотности вероятности $p(W_\tau)$ работы в процессах с равномерно распределенной вдоль направления x и распределенной согласно формуле Больцмана вдоль направления y координатой частицы удовлетворяет теореме Крукса (и, следовательно, также и соотношению Ярзинского) для произвольного τ, см. Приложение D. Заметим также, что $\sigma^2(W_\tau) \approx \frac{2D^2\alpha^2}{\mu k}\tau = 2k_BT\langle W_\tau \rangle$ (см. ур. (54), (55) и (19)) при $\alpha \gg k$ и $\tau \gg 1/(k\mu)$. Этому набору свойств удовлетворяет нормальная статистика. При $\alpha \gtrsim k$ предположение о нормальности распределения стохастической работы W_τ не может быть принято даже при $\tau \to \infty$.

Среднеквадратичное значение флуктуаций испытываемой частицей непотенциальной силы $\mathbf{f}(y(t))$ и время корреляции этих флуктуаций $\tau_{\rm cor} = \frac{\int_0^\infty dt \langle \delta\mathbf{f}(y(0)) \cdot \delta\mathbf{f}(y(t)) \rangle}{\langle \delta f^2 \rangle}$ не связаны друг с другом обратно пропорциональной зависимостью (29). Вместо этого $\langle \delta f^2 \rangle = \tau_{\rm cor}\alpha^2 D$, так что уменьшение $\langle \delta f^2 \rangle$ сопровождается уменьшением времени корреляции $\tau_{\rm cor}$.

C. Пример 3. Наконец, рассмотрим частицу с подвижностью μ и с коэффициентом диффузии D в постоянном симметричном двумерном гармоническом потенциале $U(x,y) = kx^2/2 + ky^2/2$, на которую дополнительно действует непотенциальная сила

$$f_x^{n.c.} = \alpha y, \quad f_y^{n.c.} = -\alpha x, \tag{57}$$

где $\alpha > 0$, приводящая частицу во вращение вокруг начала координат в направлении часовой стрелки (см. рис. 4c).

Уравнение Ланжевена в режиме сильного трения для такой модели имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \hat{M}\mathbf{r}(t) + \xi(t), \tag{58}$$

где матрица $\hat{M}$ определена как

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -\mu k & \alpha\mu \\ -\alpha\mu & \mu k \end{pmatrix}, \tag{59}$$

а компоненты случайного вектора $\xi(t) = (\xi_x(t), \xi_y(t))^T$ имеют гауссову статистику, определенную линейным моментом (6) и квадратичным коррелятором (6).

Стохастическая работа W_τ, совершаемая непотенциальной силой (57) в течение интервала τ равна

$$W_\tau = \int_0^\tau f_x^{n.c.}(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt + \tag{60}$$

$$+ \int_0^\tau f_y^{n.c.}(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt. \tag{61}$$

Для достаточно длительного рабочего процесса, $\tau \gg \gg (\mu k)^{-1}$, среднее значение и дисперсия стохастической работы могут быть выражены как

$$\langle W_\tau \rangle = \alpha^2 \mu \langle r^2 \rangle t = 2\alpha^2 \frac{D}{k}\tau, \tag{62}$$

и

$$\sigma^2(W_\tau) = 4\alpha^4 \frac{D^2}{k^3\mu}\tau + \frac{4\alpha^2 D^2}{\mu k}\tau, \tag{63}$$

см. Приложение C, и, следовательно, относительная флуктуация дается формулой

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle}|_{\gamma_\tau \gg 1} = \sqrt{\frac{1}{\gamma_\tau}\left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right)}, \tag{64}$$

где γ_τ определено в ур. (42). Как и в предыдущем примере, среднее значение работы в ур. (62) зависит от интенсивности шума. Заметим, что в примерах 2 и 3 относительная флуктуация $\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle}$ не стремится к нулю при увеличении параметра α, который определяет среднюю величину совершающей работу силы. Напротив, в процессе перемещения частицы движущимся профилем потенциала и для неравновесного стационарного состояния на окружности (пример 1), путем увеличения вынуждающей силы может быть достигнута сколь угодно малая относительная флуктуация работы.

При условии, что начальная координата частицы имеет статистически стационарное распределение, статистика работы в рассматриваемой модели удовлетворяет теореме Крукса (20) и равенству Ярзинского (14) для произвольного τ (Приложение D). Для длительных процессов, $\tau \gg 1/(k\mu)$, с малой вынуждающей силой, $\alpha \ll k$, оказывается приближенно справедливым соотношение (19), что может указывать на нормальность статистики работы в этом режиме.

Наконец, отметим, что амплитуда флуктуаций силы $\langle \delta f^2 \rangle = \frac{4\alpha^2 D}{\mu k}$ и время корреляции флуктуаций $\tau_c = \frac{k\mu}{k^2\mu^2 + \alpha^2\mu^2}$ не удовлетворяют соотношению (29), полученному для частицы в движущемся потенциале.

IV. Заключение. Отметим, что вывод ур. (29) основан на предположении о нормальности статистики работы в пределе большой длительности процесса τ. Нормальное распределение работы также предполагалось при выводе ур. (44). В тех случаях, когда статистика в самом деле нормальная или приближенно нормальная, соотношение (29) показывает, что произведение $\langle \delta F^2 \rangle \tau_{\rm cor}$ в процессе перемещения частиц определяется их подвижностью μ и температурой шума T. Скорость v и параметры, характеризующие силу потенциала и его форму, не входят в ур. (29), что показывает, что этот результат может быть применим к большому числу практических сценариев перемещения частиц переменными потенциалами в (однородном и статистически стационарном) окружении с белым шумом. Меньшие флуктуации силы $\sqrt{\langle \delta F^2 \rangle}$, реализуемые, например, путем изменения интенсивности потенциала, характеризуются более длительным временем корреляции $\tau_{\rm cor}$. Как уменьшение $\sqrt{\langle \delta F^2 \rangle}$, так и увеличение $\tau_{\rm cor}$ означает более предсказуемое поведение флуктуирующей силы F. Отметим также, что увеличение жесткости потенциала, обеспечивая более высокую степень локализации частицы, не приводит, однако, к уменьшению амплитуды флуктуаций силы ни в абсолютном, ни в относительном смысле, см. раздел I.

Ранее несколько работ рассматривали неравенства на статистические моменты физических величин, фигурирующих в формулировках флуктуационных теорем [14–18]. В частности, работа [14] описывает нижнюю границу на среднеквадратичное отклонение случайной величины Ω, статистика которой удовлетворяет теореме Крукса [2, 8, 9]. В тех системах, где $\Omega = W_\tau/(k_B T)$ (см. примеры в разделе III и Приложении D), результаты, содержащиеся в статье [14], могут быть использованы для определения нижней границы для относительной флуктуации стохастической работы, а именно

$$\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle} \geq \sqrt{u^2 - 1}. \tag{65}$$

Здесь u определяется из уравнения $u \tanh(\frac{\langle W_\tau \rangle}{2k_B T} u) = 1$. Легко проверить, что выражения (40), (50), (56) и (64) удовлетворяют границе (65). Также из ур. (21) для частицы в потенциале с движущимся профилем в предположении о нормальности статистики работы в пределе больших значений τ получаем (см. уравнения (19) и (20)) $\frac{\sigma(W_\tau)}{\langle W_\tau \rangle} \geq \sqrt{u^2 - 1} \approx 2e^{-\frac{\langle W_\tau \rangle}{k_B T}} = e^{-2/{\rm Pe}_\tau^2}$ (где ${\rm Pe}_\tau^2 \ll 1$) в согласии с ур. (44).

Интересный вопрос для будущих исследований касается обобщения и извлечения следствий флуктуационных теорем для течений жидкости под действием случайных сил [19–21]. В частности, результаты работы [21] показывают, что диссипационная функция для двумерного турбулентного поля скорости, поддерживаемого стохастической силой, связана с потоком энстрофии между масштабом накачки и более малыми масштабами. В указанной работе также получена флуктуационная теорема для направления каскада энстрофии в статистически равновесном состоянии. Анализ статистики работы внешних сил, характерной амплитуды флуктуаций внешних

сил, корреляционных времен и потоков в двумерных течениях жидкости, поддерживаемых случайной вынуждающей силой, в различных условиях (к примеру, с трением о дно, со средним вращением, и т.д.) остается открытой задачей.

Приложение А. Вывод соотношения Ярзинского (ур. (14)). Здесь мы приводим вывод соотношения Ярзинского для ланжевеновской системы, изображенной на рис. 1, используя аргументы, представленные в работе [10].

Будем обозначать как $\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(t)$ решение уравнения Ланжевена (3) для начального условия $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ и реализации шума $\xi(t)$. Совместная плотность распределения вероятности для координат частиц при $t < 0$ (т.е. до начала движения профиля потенциала) дается формулой Больцмана

$$p(\mathbf{X};0) = p_0^{eq}(\mathbf{X}) =$$

$$= \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{N} \frac{U(x_i,0)}{k_BT})}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \exp(-\sum_{i=1}^{N} \frac{U(x_i,0)}{k_BT})}, \quad \text{(A.1)}$$

и, таким образом, $p(\mathbf{X};0)$ сконцентрирована в окрестности минимума потенциала $U(x,0)$.

Рассмотрим стохастическую динамику (3) в присутствии эффекта распада. То есть мы будем предполагать, что, находясь в точке $\mathbf{X}$, система может в течение интервала времени dt с вероятностью $\nu(\mathbf{X},t)dt$ распасться. Плотность вероятности различных конфигураций системы $g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0)$ тогда удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка с дополнительным слагаемым, учитывающим возможность распада

$$\begin{cases} \partial_t g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0) = D\sum_i \partial^2_{X_i} g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0) - \\ -\mu\sum_i \partial_{X_i}[f_i(\mathbf{X},t)g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0)] - \\ -\nu(\mathbf{X},t)g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0), \\ g(\mathbf{X};0|\mathbf{X}_0;0) = \delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0). \end{cases} \quad \text{(A.2)}$$

Стохастические траектории $\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(t)$ в исходной задаче (3) и плотность вероятности $g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0)$ в присутствии распада связаны друг с другом формулой Фейнмана–Каца

$$g(\mathbf{X};t|\mathbf{X}_0;0) = \quad \text{(A.3)}$$

$$= \left\langle \delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(t)) \exp\left[-\int_0^t d\tau \nu(\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau),\tau)\right]\right\rangle_\xi .$$

Ненулевой вклад в $g(\mathbf{X};t|X_0;0)$ дают те решения уравнения Ланжевена (3), для которых система достигает точки $\mathbf{X}$ в момент времени t, не успев, таким образом, распасться до этого момента.

Теперь рассмотрим вспомогательную функцию

$$\tilde{p}(\mathbf{X};t) \equiv \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{N} \frac{U(x_i,t)}{k_BT})}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \exp(-\sum_{i=1}^{N} \frac{U(x_i,0)}{k_BT})}. \quad \text{(A.4)}$$

Подстановкой можно проверить, что данная функция удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \tilde{p}(\mathbf{X};t) = D\partial^2_{X_i}\tilde{p}(\mathbf{X};t) - \mu\sum_i \partial_{X_i}[f_i(\mathbf{X},t)\tilde{p}(\mathbf{X};t)] -$$

$$- \frac{1}{k_BT}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U(x_i,t)}{\partial t}\tilde{p}(\mathbf{X};t), \quad \text{(A.5)}$$

с начальным условием $\tilde{p}(\mathbf{X};0) = p_0^{eq}(\mathbf{X})$, и, следовательно, учитывая формулу Фейнмана–Каца, можно записать

$$\tilde{p}(\mathbf{X};\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^N\mathbf{X}_0 g(\mathbf{X};\tau|\mathbf{X}_0;0)\tilde{p}(\mathbf{X}_0;0) = \quad \text{(A.6)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d^N\mathbf{X}_0 \tilde{p}(\mathbf{X}_0;0)\left\langle \delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{1}{k_BT}\sum_{i=1}^{N}\int_0^\tau dt \frac{\partial U(\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(t),t)}{\partial t}\right]\right\rangle_\xi = \quad \text{(A.7)}$$

$$= \left\langle \delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)) \exp\left[-\frac{W_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)}{k_BT}\right]\right\rangle_{\xi,\mathbf{X}_0}, \quad \text{(A.8)}$$

где $W_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)$ – это стохастическая работа, совершаемая над частицами (в отсутствие эффекта распада) при начальном условии $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ и реализации шума $\xi(t)$, см. ур. (7).

Таким образом,

$$\frac{\exp(-\sum_i \frac{U(x_i,\tau)}{k_BT})}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \exp(-\sum_i \frac{U(x_i,0)}{k_BT})} =$$

$$= \left\langle \delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)) \exp\left[-\frac{W_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)}{k_BT}\right]\right\rangle_{\xi,\mathbf{X}_0}. \quad \text{(A.9)}$$

Здесь $\mathbf{X}_0$ – это начальная конфигурация системы, имеющая больцмановское распределение.

Проинтегрируем обе части последней формулы по x

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \exp(-\sum_i \frac{U(x_i,\tau)}{k_BT})}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \exp(-\sum_i \frac{U(x,0)}{k_BT})} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \times \\ \times \left\langle \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)) \exp\left[-\frac{W_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)}{k_BT}\right]\right\rangle_{\xi,\mathbf{X}_0}. \quad \text{(A.10)}$$

Поскольку потенциал не меняет своей формы, то интеграл в левой части равен единице

$$1 = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} d^N\mathbf{X}\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)) \exp\left[-\frac{W_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)}{k_BT}\right]\right\rangle_{\xi,\mathbf{X}_0}. \quad \text{(A.11)}$$

В итоге получаем соотношение Ярзинского

$$1 = \left\langle \exp\left[-\frac{W_{\xi,\mathbf{X}_0}(\tau)}{k_BT}\right]\right\rangle_{\xi,\mathbf{X}_0}, \quad \text{(A.12)}$$

(ур. (14)).

Приложение B. Вывод ур. (43). Для частицы в гармоническом потенциале, профиль которого движется с зависящей от времени скоростью $\dot\lambda(t)$, решение уравнения Ланжевена (3) с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = e^{-\mu kt}(x_0 + \int_0^t e^{\mu k t_1}(\xi(t_1) + \mu k\lambda(t_1))dt_1), \quad \text{(B.1)}$$

так что стохастическая работа (7) как функционал от реализации белого шума $\xi(t)$ дается выражением

$$W_\tau = \int_0^\tau -\dot\lambda(t)k(x(t) - \lambda(t))dt = \quad \text{(B.2)}$$

$$= k\int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dot\lambda(t_1)\dot\lambda(t_2)e^{\mu k(t_2-t_1)} - \\ - kx_0\int_0^\tau dt_1\dot\lambda(t_1)e^{-\mu kt_1} - \\ - k\int_0^\tau dt_2\xi(t_2)e^{\mu kt_2}\int_{t_2}^\tau dt_1\dot\lambda(t_1)e^{-\mu kt_1}. \quad \text{(B.3)}$$

Учитывая, что $\langle x_0\rangle = 0$ и $\langle x_0^2\rangle = \frac{k_BT}{k}$, как следует из формулы Больцмана для частицы, координата которой имеет статистически равновесное распределение в исходно постоянном потенциале (эти выражения предполагают, что частица движется диффузионно на масштабах длины $\langle x_0^2\rangle$, т.е. $k_BT/k/D \gg \tau_{St}$), мы получаем

$$\langle W_\tau\rangle = k\int_0^\tau dt_1\int_0^{t_1} dt_2(\dot\lambda(t_1)\dot\lambda(t_2)e^{\mu k(t_2-t_1)}), \quad \text{(B.4)}$$

и

$$\sigma^2(W_\tau) = \langle(W_\tau - \langle W_\tau\rangle)^2\rangle = \\ = kk_BT\left(\int_0^\tau dt_1\dot\lambda(t_1)e^{-\mu kt_1}\right)^2 + \\ + 2Dk^2\int_0^\tau dt_2 e^{2\mu kt_2}\left(\int_{t_2}^\tau dt_1\dot\lambda(t_1)e^{-\mu kt_1}\right)^2 = \quad \text{(B.5)}$$

$$= 2kk_BT\int_0^\tau dt_1\int_0^{t_1} dt_2\dot\lambda(t_1)\dot\lambda(t_2)e^{\mu k(t_2-t_1)}. \quad \text{(B.6)}$$

Уравнения (B.4) и (B.5) дают ур. (43).

Приложение C. Вывод уравнений (54) и (55). Решение уравнений стохастической динамики (52) и (53), соответствующих модели, изображенной на рис. 4b, имеет следующую форму

$$x(t) = x(0) + \mu\alpha\int_0^t dt_1 y(t_1) + \int_0^t dt_1\xi_x(t_1), \quad \text{(C.1)}$$

$$y(t) = y(0)e^{-k\mu t} + e^{-k\mu t}\int_0^t dt_2 e^{k\mu t_2}\xi_y(t_2). \quad \text{(C.2)}$$

Работа непотенциальной силы за интервал времени τ дается выражением

$$W_\tau = \int_0^\tau \alpha y(t)dx(t) = \alpha\int_0^\tau dty(t)(\alpha\mu y(t) + \xi_x(t)), \quad \text{(C.3)}$$

так что для среднего значения $\langle W_\tau\rangle$ в пределе большого τ из уравнений (C.1), (C.2) и (C.3) получается

$$\langle W_\tau\rangle = \alpha^2\mu\int_0^\tau dt\langle y^2(t)\rangle + \alpha\int_0^\tau dt\langle y(t)\xi_x(t)\rangle = \\ = \alpha^2\mu\langle y^2(t)\rangle\tau = \frac{\alpha^2 D}{k}\tau, \quad \text{(C.4)}$$

(ур. (54)), в то время как квадратичный момент работы W_τ может быть вычислен при помощи теоремы Вика для нормально распределенных случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$. Это дает

$$\langle W_\tau^2\rangle = \langle(\alpha^2\mu\int_0^\tau dty^2(t) + \alpha\int_0^\tau dty(t)\xi_x(t))^2\rangle = \\ = \alpha^4\mu^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y^2(t_1)y^2(t_2)\rangle + \quad \text{(C.5)}$$

$$+ \alpha^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y(t_1)\xi_x(t_1)y(t_2)\xi_x(t_2)\rangle + \\ + 2\alpha^3\mu\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y^2(t_1)y(t_2)\xi_x(t_1)\rangle = \quad \text{(C.6)}$$

$$= \alpha^4\mu^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y^2(t_1)\rangle\langle y^2(t_2)\rangle + \\ + 2\alpha^4\mu^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y(t_1)y(t_2)\rangle^2 + \quad \text{(C.7)}$$

$$+\alpha^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y(t_1)y(t_2)\rangle\langle\xi_x(t_1)\xi_x(t_2)\rangle =$$
$$=\langle W_\tau\rangle^2+2\alpha^4\mu^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\langle y(t_1)y(t_2)\rangle^2+$$
$$+2D\alpha^2\langle y^2\rangle\tau = \quad \text{(C.8)}$$
$$=\langle W_\tau\rangle^2+2\alpha^4\mu^2\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\frac{D^2}{\mu^2k^2}e^{-2k|t_2-t_1|}+$$
$$+2D\alpha^2\langle y^2\rangle\tau\approx\langle W_\tau\rangle^2+\frac{2D^2\alpha^4}{k^3\mu}\tau+\frac{2D^2\alpha^2}{\mu k}\tau, \quad \text{(C.9)}$$

(ур. (55)).

Приложение D. Вывод уравнений (62) и (63). Для модели, изображенной на рис. 4 с траектория частицы дается решением уравнений Ланжевена (58)

$$x(t)=x(0)e^{-k\mu t}\cos\alpha\mu t+y(0)e^{-k\mu t}\sin\alpha\mu t+$$
$$+\int_0^t dt'e^{-k\mu(t-t')}\cos\alpha\mu(t-t')\xi_x(t')dt'+ \quad \text{(D.1)}$$
$$+\int_0^t dt'e^{-k\mu(t-t')}\sin\alpha\mu(t-t')\xi_y(t')dt', \quad \text{(D.2)}$$
$$y(t)=-x(0)e^{-k\mu t}\sin\alpha\mu t+y(0)e^{-k\mu t}\cos\mu\alpha t-$$
$$-\int_0^t dt'e^{-k\mu(t-t')}\sin\alpha\mu(t-t')\xi_x(t')dt'+ \quad \text{(D.3)}$$
$$+\int_0^t dt'e^{-k\mu(t-t')}\cos\alpha\mu(t-t')\xi_y(t')dt'. \quad \text{(D.4)}$$

Отсюда видно, что $x(t)$ и $y(t)$ имеют нормальную статистику.

Стохастическая работа в процессе длительности τ равна

$$W_\tau=\int f_x(x(t'),y(t'))dx(t')+\int f_y(x(t'),y(t'))dy(t')= \quad \text{(D.5)}$$
$$=\int_0^\tau\alpha y(t)(\alpha\mu y(t)-\mu kx(t))dt+\int_0^\tau\alpha y(t)\xi_x(t)dt-$$
$$-\int_0^\tau dt\alpha x(t)(-\alpha\mu x(t)-\mu ky(t))-\int_0^\tau\alpha x(t)\xi_y(t)dt. \quad \text{(D.6)}$$

Из уравнений (D.1), (D.3) и (D.5) мы находим, что среднее значение в пределе большого τ дается выражением

$$\langle W_\tau\rangle=2\int_0^\tau\alpha\langle y(t)(\alpha\mu y(t)-\mu kx(t))\rangle dt+$$
$$+2\int_0^\tau\alpha\langle y(t)\xi_x(t)dt\rangle=2\alpha^2\mu\langle y^2\rangle t=\frac{2\alpha^2D}{k}\tau, \quad \text{(D.7)}$$

соответствующим уравнению (62). Для среднеквадратичного значения получаем

$$\langle W_\tau^2\rangle=2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\alpha\langle y(t_1)(\alpha\mu y(t_1)-$$
$$-\mu kx(t_1))\alpha y(t_2)(\alpha\mu y(t_2)-\mu kx(t_2))\rangle+ \quad \text{(D.8)}$$
$$+4\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\alpha\langle y(t_1)(\alpha\mu y(t_1)-$$
$$-\mu kx(t_1))\alpha y(t_2)\xi_x(t_2)\rangle-$$
$$-2\int_0^\tau dt_1\alpha\langle y(t_1)\xi_x(t_1)\int_0^\tau dt_2\alpha y(t_2)\xi_x(t_2)\rangle- \quad \text{(D.9)}$$
$$-2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\alpha\langle y(t_1)(\alpha\mu y(t_1)-$$
$$-\mu kx(t_1))\alpha x(t_2)(-\alpha\mu x(t_2)-\mu ky(t_2))\rangle- \quad \text{(D.10)}$$
$$-2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\alpha\langle y(t_1)(\alpha\mu y(t_1)-$$
$$-\mu kx(t_1))\alpha x(t_2)\xi_y(t_2)\rangle- \quad \text{(D.11)}$$
$$-2\int_0^\tau dt_1\alpha\langle y(t_1)\xi_x(t_1)\int_0^\tau dt_2\alpha x(t_2)(-\alpha\mu x(t_2)-$$
$$-\mu ky(t_2))\rangle-2\int_0^\tau dt_1\alpha\langle y(t_1)\xi_x(t_1)\times$$
$$\times\int_0^\tau dt_2\alpha x(t_2)\xi_y(t_2)\rangle= \quad \text{(D.12)}$$
$$=2\alpha^3\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle(\alpha y(t_1)y(t_1)-$$
$$-kx(t_1)y(t_1))(y^2(t_2)+x^2(t_2))\rangle+ \quad \text{(D.13)}$$
$$+4\alpha^2\mu\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y(t_1)(\alpha y(t_1)-$$
$$-kx(t_1))y(t_2)\xi_x(t_2)\rangle- \quad \text{(D.14)}$$
$$-2\alpha^2\mu\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y(t_1)(\alpha y(t_1)-$$
$$-kx(t_1))x(t_2)\xi_y(t_2)\rangle- \quad \text{(D.15)}$$
$$-2\alpha^2\mu\int_0^\tau dt_1\langle y(t_1)\xi_x(t_1)\int_0^\tau dt_2x(t_2)(-\alpha x(t_2)-$$
$$-ky(t_2))\rangle+2\alpha^2\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y(t_1)\xi_x(t_1)\int_0^\tau y(t_2)\xi_x(t_2)\rangle. \quad \text{(D.16)}$$

Усреднение может быть проведено при помощи уравнений (D.1) и (D.3) и теоремы Вика для гауссовых случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $x(t)$ и $y(t)$. Это дает

$$\langle W_\tau^2\rangle=2\alpha^4\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y^2(t_1)y^2(t_2)\rangle-$$
$$-2\alpha^3\mu^2k\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle x(t_1)y(t_1)y^2(t_2)\rangle+ \quad \text{(D.17)}$$
$$+2\alpha^4\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y^2(t_1)x^2(t_2)\rangle-$$
$$-2\alpha^3\mu^2k\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle x(t_1)y(t_1)x^2(t_2)\rangle+ \quad \text{(D.18)}$$

$$+2\alpha^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y(t_1)y(t_2)\rangle\langle\xi_x(t_1)\xi_x(t_2)\rangle =$$

$$=4\alpha^4\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y^2(t_1)\rangle\langle y^2(t_2)\rangle + \quad \text{(D.19)}$$

$$+4\alpha^4\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y(t_1)y(t_2)\rangle^2 -$$

$$-4\alpha^3\mu^2k\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle x(t_1)y(t_2)\rangle\langle y(t_1)y(t_2)\rangle + \quad \text{(D.20)}$$

$$+4\alpha^4\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle y(t_1)x(t_2)\rangle^2 -$$

$$-4\alpha^3\mu^2k\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\langle x(t_1)x(t_2)\rangle\langle y(t_1)x(t_2)\rangle + \quad \text{(D.21)}$$

$$+4\alpha^2D\langle y^2(t)\rangle\tau = 4\alpha^4\mu^2\langle y^2\rangle^2\tau^2 +$$

$$+4\alpha^4\mu^2\frac{D^2}{k^2\mu^2}\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\cos^2\alpha\mu(t_2-t_1)e^{-2k\mu|t_2-t_1|} + \quad \text{(D.22)}$$

$$+4\alpha^3\mu^2k\frac{D^2}{k^2\mu^2}\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\cos\alpha\mu(t_2-t_1)\times$$

$$\times e^{-2k\mu|t_2-t_1|}\sin\alpha\mu(t_2-t_1) + \quad \text{(D.23)}$$

$$+4\alpha^4\mu^2\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2e^{-2k\mu|t_2-t_1|}\sin^2\alpha\mu(t_2-t_1) - \quad \text{(D.24)}$$

$$-4\alpha^3\mu^2k\frac{D^2}{k^2\mu^2}\int_0^\tau\int_0^\tau dt_1dt_2\cos\alpha\mu(t_2-t_1)\times$$

$$\times e^{-2k\mu|t_2-t_1|}\sin\alpha\mu(t_2-t_1) + \frac{4\alpha^2D^2}{\mu k}\tau = \quad \text{(D.25)}$$

$$=4\alpha^4\frac{D^2}{k^2}\tau^2 + 4\alpha^4\frac{D^2}{k^3\mu}\tau + \frac{4\alpha^2D^2}{\mu k}\tau. \quad \text{(D.26)}$$

Совместно с ур. (62) этот результат приводит к ур. (63).

Приложение E. Вывод равенства Крукса (ур. (20)). Здесь приводится вывод теоремы Крукса (ур. (20)) для рабочмх процессов, совершаемых непотенциальными силами в линейных моделях из раздела III. Движение частицы описывается уравнением Ланжевена в режиме сильного трения

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mu\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) + \xi(t), \quad \text{(E.1)}$$

где $\xi(t)$ – это гауссов белый шум с нулевым средним значением, $\langle\xi_i(t)\rangle = 0$, и парной корреляционной функцией $\langle\xi_i(t_1)\xi_j(t_2)\rangle = 2\delta_{ij}\mu k_BT\delta(t_2-t_1)$, а $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ – суммарная регулярная сила, действующая на частицу. Стационарное распределение вероятности координаты частицы (если таковое реализуется) будет обозначаться как $\mathcal{Q}^{st}$.

Введем так называемую диссипационную функцию (см., например, [22])

$$\Omega[\mathcal{R}_\tau] = \ln\frac{\mathcal{P}[\mathcal{R}_\tau|\mathbf{r}_0]\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_0]}{\mathcal{P}^*[\mathcal{R}^*_\tau|\mathbf{r}^*_0]\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}^*_0]}, \quad \text{(E.2)}$$

где $\mathcal{R}_\tau = \{\mathbf{r}(t), 0 < t \le \tau\}$ обозначает стохастическую траекторию длительности τ, $\mathcal{R}^*_t = \mathcal{R}_{\tau-t} = \{\mathbf{r}(\tau-t), 0 \le t < \tau\}$ – обращенная во времени траектория, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ – статистические веса прямой и обратной траекторий с заданными начальными координатами, $\mathcal{Q}^{st}$ – стационарная плотность вероятности координаты частицы.

Довольно просто показать, что диссипационная функция удовлетворяет соотношению Ярзинского

$$\langle e^{-\Omega}\rangle = \int[\mathcal{D}\mathcal{R}_\tau]e^{-\Omega[\mathcal{R}_\tau]}\mathcal{P}[\mathcal{R}_\tau|\mathbf{r}_0]\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_0] =$$

$$= \int[\mathcal{D}\mathcal{R}^*_\tau]\mathcal{P}^*[\mathcal{R}^*_\tau|\mathbf{r}^*_0]\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}^*_0]. \quad \text{(E.3)}$$

Кроме того, плотность вероятности $p(\omega)$ значений диссипационной функции удовлетворяет теореме Крукса:

$$p(\omega) = \langle\delta(\omega-\Omega[\mathcal{R}_\tau])\rangle =$$

$$=\int[\mathcal{D}\mathcal{R}_\tau]\delta(\omega-\Omega[\mathcal{R}_\tau])\mathcal{P}[\mathcal{R}_\tau|\mathbf{r}_0]\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_0] = \quad \text{(E.4)}$$

$$=\int[\mathcal{D}\mathcal{R}^*_\tau]\delta(\omega-\Omega[\mathcal{R}_\tau])e^{\Omega[\mathcal{R}_\tau]}\mathcal{P}^*[\mathcal{R}^*_\tau|\mathbf{r}^*_0]\mathcal{Q}_{st}[\mathcal{R}^*_\tau] =$$

$$=e^\omega\int[\mathcal{D}\mathcal{R}^*_\tau]\delta(\omega-\Omega[\mathcal{R}_\tau])\mathcal{P}^*[\mathcal{R}^*_\tau|\mathbf{r}^*_0]\mathcal{Q}_{st}[\mathcal{R}^*_\tau] = \quad \text{(E.5)}$$

$$=e^\omega\int[\mathcal{D}\mathcal{R}^*_\tau]\delta(\omega+\Omega[\mathcal{R}^*_\tau])\mathcal{P}^*[\mathcal{R}^*_\tau|\mathbf{r}^*_0]\mathcal{Q}_{st}[\mathcal{R}^*_\tau] \quad \text{(E.6)}$$

$$=e^\omega\langle\delta(\omega+\Omega[\mathcal{R}_\tau])\rangle = e^\omega p(-\omega). \quad \text{(E.7)}$$

Далее, выведем явное выражение для $\Omega[\mathcal{R}_\tau]$. Статистические веса прямой и обратной траекторий частицы в примерах, приведенных в разделе III, даются формулами

$$\mathcal{P}[\mathcal{R}_t|\mathbf{r}_0] = \prod_{i=0}^{N-1} g_{\tau_0}[\mathbf{r}_{i+1}|\mathbf{r}_i] =$$

$$=\frac{1}{(4\pi D\tau_0)^{Nd/2}}\exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i-\mu\mathbf{f}_i\tau_0)^2}{4D\tau_0}\right), \quad \text{(E.8)}$$

и

$$\mathcal{P}^*[\mathcal{R}^*_\tau|\mathbf{r}^*(0)] = \prod_{j=0}^{N-1} g^*_{\tau_0}[\mathbf{r}^*_{j+1}|\mathbf{r}^*_{t_j}] =$$

$$=\prod_{j=0}^{N-1} g_{\tau_0}[\mathbf{r}_{N-j-1}|\mathbf{r}_{N-j}] = \prod_{i=0}^{N-1} g_{\tau_0}[\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_{i+1}], \quad \text{(E.9)}$$

(был выполнен переход к индексу суммирования $j = \frac{\tau}{\Delta t} - i - 1$), где τ_0 – время корреляции шума.

Подстановка этих выражений в определение (E.2) дает

$$\Omega = \ln \mathcal{Q}[\mathbf{r}_0;0] - \ln \mathcal{Q}^*[\mathbf{r}_0^*;\tau] + \ln \frac{\mathcal{P}[\mathcal{R}_\tau|\mathbf{r}_0]}{\mathcal{P}^*[\mathcal{R}_\tau^*|\mathbf{r}_0^*]} =$$

$$= \ln \mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_0] - \ln \mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_\tau] + \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \mu \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i)}{D} = \tag{E.10}$$

$$= \ln \mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_0] - \ln \mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_\tau] + \frac{\int_0^\tau \mathbf{f}(t)\dot{\mathbf{r}}(t)dt}{k_BT}, \tag{E.11}$$

где мы учли, что $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_\tau$ по определению обратной траектории.

Для частицы на окружности под действием постоянной силы $f = \text{const}$ (Пример 1) стационарное распределение координаты однородное, $\mathcal{Q}^{st}[\varphi] = 1/(2\pi)$, и мы получаем

$$\Omega = \frac{\int_0^\tau fR\dot{\varphi}(t)dt}{k_BT} = \frac{W_\tau}{k_BT}. \tag{E.12}$$

Далее, для частицы в Примере 2 стационарное распределение $\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}]$ не существует. Мы можем, однако, предположить, что система конечна в направлении x. Тогда $Q^{st}(\mathbf{r}) = C\exp(-\frac{y^2}{2D/(k/mu)})L_x^{-1}$, где $L_x \to \infty$ – это размер системы. Для диссипационной функции в итоге получаем

$$\Omega = -\frac{ky_0^2}{2k_BT} + \frac{ky_0^{*2}}{2k_BT} + \frac{ky_0^2}{2k_BT} - \\ - \frac{ky_\tau^2}{2k_BT} + \frac{W_\tau}{k_BT} = \frac{W_\tau}{k_BT}. \tag{E.13}$$

Для частицы в Примере 3: $\mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}] = \frac{1}{2\pi D/(\mu k)}\exp(-\frac{r^2}{2D/(\mu k)})$. Видим, что диссипационная функция сводится к работе W_τ непотенциальной компоненты силы

$$\Omega = \ln \mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_0] - \ln \mathcal{Q}^{st}[\mathbf{r}_\tau] + \frac{\int_0^\tau (-k\mathbf{r}+\mathbf{f}_{n.c})\dot{\mathbf{r}}(t)dt}{k_BT} = \\ = -\frac{kr_0^2}{2k_BT} + \frac{kr_0^{*2}}{2k_BT} + \frac{kr_0^2}{2k_BT} - \frac{kr_\tau^2}{2k_BT} + \frac{W_\tau}{k_BT} = \frac{W_\tau}{k_BT}. \tag{E.14}$$

Таким образом, стохастическая работа W_τ в этих моделях удовлетворяет соотношению Ярзинского (E.3) (ур. (14)) и теореме Крукса (E.4) (ур. (20)).

Заметим также, что если начальная координата частицы распределена не согласно стационарной плотности вероятности для заданной конфигурации внешних полей, то $\Omega = W_\tau + o(t)$ в пределе большого τ, так что соотношение Ярзинского и теорема Крукса приближенно справедливы для W_τ в достаточно длительных рабочих процессах.

Финансирование работы. Работа была поддержана грантом # 23-72-30006 Российского научного фонда.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. H. Risken, *Fokker–Planck equation*, in *The Fokker–Planck Equation* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1996).
2. U. Seifert, "Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines", Rep. Prog. Phys. **75**(12), 126001 (2012).
3. G. N. Bochkov and Y. E. Kuzovlev, "General theory of thermal fluctuations in nonlinear systems", Sov. Phys. JETP **45**, 125 (1977).
4. G. N. Bochkov and Y. E. Kuzlovlev, "Fluctuation-disspation relations for nonequilibrium processes in open systems", Sov. Phys. JETP **49**, 543 (1979).
5. C. Jarzynski, "Nonequilibrium equality for free energy differences", Phys. Rev. Lett. **78**(14), 2690 (1997).
6. C. Jarzynski, "Equilibrium free energy differences from nonequilibrium measurements: A master equation approach", Phys. Rev. E. **56**(5), 5018 (1997).
7. G. E. Crooks, "Nonequilibrium measurements of free energy differences for microscopically reversible Markovian systems", J. Stat. Phys. **90**(5), 1481 (1998).
8. G. E. Crooks, "Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences", Phys. Rev. E **60**, 2721 (1999).
9. G. E. Crooks, "Path-ensemble averages in systems driven far from equilibrium", Phys. Rev. E **61**, 2361 (2000).
10. G. Hummer and A. Szabo, "Free energy reconstruction from nonequilibrium single-molecule pulling experiments", Proceedings of the National Academy of Sciences **98**(7), 3658 (2001).
11. O. Mazonka and C. Jarzynski, "Exactly solvable model illustrating far- from-equilibrium predictions", arXiv preprint cond-mat/9912121. (1999).
12. R. van Zon and E. G. Cohen, "Stationary and transient work-fluctuation theorems for a dragged Brownian particle", Phys. Rev. E **67**(4), 046102 (2003).
13. R. van Zon and E. G. D. Cohen, "Extended heat-fluctuation theorems for a system with deterministic and stochastic forces", Phys. Rev. E Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics **69**(5), 056121 (2004).
14. N. Merhav and Y. Kafri, "Statistical properties of entropy production derived from fluctuation theorems", J. Stat. Mech.: Theory Exp. **2010**(12), P12022 (2010).
15. K. Ptaszynski, "Bounds on skewness and kurtosis of steady-state currents", Phys. Rev. E **106**(2), 024119 (2022).
16. D. S. Salazar, "Lower bound for entropy production rate in stochastic systems far from equilibrium", Phys. Rev. E **106**(3), L032101 (2022).

17. T. Wampler and A. C. Barato, "Skewness and kurtosis in stochastic thermodynamics", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**(1), 014002 (2022).
18. D. S. Salazar, "Bound for the moment generating function from the detailed fluctuation theorem", Phys. Rev. E **107**(6), L062103 (2023).
19. S. Ciliberto, N. Garnier, S. Hernandez, C. Lacpatia, J.-F. Pinton, and G. Ruiz Chavarria, "Experimental test of the Gallavotti-Cohen fluctuation theorem in turbulent flows", Physica A **340**, 240 (2004).
20. X.-D. Shang, P. Tong, and K.-Q. Xia, "Test of steady state fluctuation theorem in turbulent Rayleigh-Bénard convection", Phys. Rev. E **72**, 015301R (2005).
21. T. Gilbert, M. Baiesi, and C. Maes, "Enstrophy dissipation in two-dimensional turbulence", Phys. Rev. E **72**, 056314 (2005).
22. J. C. Reid, D. M. Carberry, G. M. Wang, E. M. Sevick, D. J. Evans, and D. J. Searles, "Reversibility in nonequilibrium trajectories of an optically trapped particle", Phys. Rev. E **70**, 016111 (2004).