Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 7, стр. 309 – 311 *10 октября 1989 г.*

ЧЕТЫРЕХПЕТЛЕВАЯ β-ФУНКЦИЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ВЕССА – ЗУМИНО – ВИТТЕНА

А.А.Дериглазов, С.В.Кетов, Я.П.Пугай

Четырехпетлевая β-функция ренормгруппы вычислена для $N = 1$ суперсимметричной двумерной модели Весса – Зумино – Виттена.

Широко используемая в приложениях модель Весса – Зумино – Виттена ($WZWM$) [1–2] представляет собой двумерную нелинейную σ-модель на групповом многообразии G с членом Весса – Зумино – Виттена (или кручением) [3]. Ее суперсимметричное обобщение ($SWZWM$) [4] является $N = 1$ суперсимметричной двумерной нелинейной σ-моделью с кручением и действием [3]

$$I_{SWZWM} = \frac{1}{4i\lambda^2} \int d^2x d^2\theta \, [g_{ab}(\varphi) - \frac{2}{3} h_{ab}(\varphi)] \bar{D}\varphi^a (1 + \gamma_3) D\varphi^b , \tag{1}$$

в плоском $N = 1$, $d = 2$ суперпространстве с координатами (x^μ, θ^α), где g_{ab} – метрика на G, h_{ab} – потенциал кручения $(H_{abc} \equiv \partial_{[a} h_{bc]})$, $(\bar{D}, D)$ – суперковариантные производные[1)].

$SWZWM$ вполне характеризуется тензорами кривизны R_{ijkl}, обобщенной кривизны $\hat{R}_{ijkl}$ с кручением и самого кручения H_{ijk} в касательном к G пространстве [3]

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= f_{ij}{}^m f_{mkl} , \\ \hat{R}_{ijkl} &= (1 - \eta^2) R_{ijkl} , \\ H_{ijk} &= \eta f_{ijk} , \end{aligned} \tag{2}$$

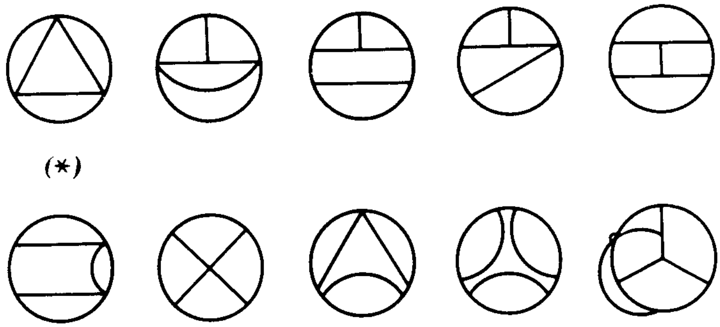
где f_{ijk} суть структурные константы компактной и полупростой группы Ли G,

$$\eta \equiv n\lambda^2 / 2\pi . \tag{3}$$

---

1) Наши соглашения и обозначения совпадают с принятыми в [5].

λ^2 представляет константу связи теории , n – коэффициент перед членом Весса – Зумино – Виттена, принимающий лиш целые значения в силу известного эффекта топологического квантования [2 – 3]. В явном виде лагранжиан $SWZWM$ приведен в [4], для фактического вычисления β-функции достаточно формул (2).



Топологии диаграмм, определяющих четырехпетлевую β-функцию $SWZWM$

Для квантовых вычислений по теории возмущений в нелинейных σ-моделях удобно воспользоваться ковариантным методом фонового поля, определив фоново-квантовое разложение действия (1) вдоль геодезических [3]. Таким образом находятся ковариантные правила Фейнмана для суперграфов [5]. В силу перенормируемости теории ковариантный l-петлевой контрчлен имеет вид

$$I_c^{(l)} = \frac{1}{4i\lambda^2} \int d^2x d^2\theta \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(2\epsilon)^k} T_{a\ b}^{(k,\ l)} \bar{D}\varphi^a (1 + \gamma_3) D\varphi^b , \tag{4}$$

причем β-функции σ-модели определяются вычетом при простом полюсе

$$\beta_{ab} \equiv \beta^g_{(ab)} + \beta^h_{[ab]} = \sum_{l=1}^{\infty} l T_{ab}^{(1,\ l)} . \tag{5}$$

Ультрафиолетовая регуляризация теории проводится путем аналитического продолжения импульсных интегралов в размерность $d = 2 - 2\epsilon$, причем D-алгебра и γ-матрицы определены в $d = 2$, что составляет содержание известной суперсимметричной размерной регуляризации посредством размерной редукции [6]. Разделение инфракрасных и ультрафиолетовых расходимостей проводится с помощью массового параметра m^2. В бозонном случае трехпетлевая β-функция $WZWM$ вычислена в [7]. В суперсимметричном случае однопетлевая β-функция $SWZWM$ вычислена в [3]. Согласно общим результатам [5] двухпетлевая и трехпетлевая поправки в суперсимметричном случае отсутствуют.

Четырехпетлевая поправка в β-функции $SWZWM$ определяется 10 базовыми диаграммами, изображенными наа рисунке. Фактически, имеется 35 четырехпетлевых диаграмм, дающих отличный от нуля вклад в β-функцию, с учетом спецификации вершин на рисунке.

Замечательно, что расходимости всех диаграмм на рисунке могут быть сведены с использованием D-алгебры и интегрирования по частям к расходимостям первой диаграммы (*), что обобщает известный результат [8] с учетом кручения. Соответствующий интеграл после вычитания всех подрасходимостей принимает вид [8]

$$A_4 = \int \frac{d^d k d^d q d^d r d^d t}{(2\pi)^{4d}} \frac{k \cdot (t-k) q \cdot (t-q)}{k^2(t-k)^2 q^2 (t-q)^2 (r^2+m^2)[(t-r)^2+m^2]} \to \frac{4}{(4\pi)^4} \left[\frac{\zeta(3)}{\epsilon} \frac{1}{6\epsilon^4} \right]. \tag{6}$$

Следовательно, все вклады в четырехпетлевую β-функцию *произвольной* суперсимметричной двумерной нелинейной σ-модели с кручением пропорциональны $\zeta(3)$, что находится в соответствии с низкоэнергетическим разложением четырехточечных древесных супер - струнных амплитуд [9 - 11].

Наконец, прямое вычисление β-функции

$$\beta_\lambda \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \lambda^2(\mu), \qquad \beta_{ij} = - \frac{\delta_{ij}}{\lambda^4} \beta_\lambda , \tag{7}$$

где μ суть масштабный размерный параметр ренормгруппы, с учетом однопетлевого вклада [3] дает

$$\beta_\lambda = - \frac{-\lambda^4 Q}{2\pi} (1-\eta^2) - \frac{\lambda^{10} Q^4 \zeta(3)}{2^7 (4\pi)^4} (1-\eta^2)[q_0 + q_2\eta^2 + q_4\eta^4 + q_6\eta^6], \tag{8}$$

где Q является собственным значением оператора Казимира второго порядка в присоединенном представлении G

$$f_{imn} f_j^{\ mn} = Q\delta_{ij} , \tag{9}$$

а коэффициенты q_A имеют вид

$$q_0 = 18, \qquad q_2 = 94/3, \qquad q_4 = 319, \qquad q_6 = -289 . \tag{10}$$

Член Весса – Зумино – Виттена не перенормируется вовсе, что и следовало ожидать с учетом его топологического происхождения.

β-функция *SWZWM* в (8) исчезает в критической точке $\eta^2 = 1$, где теория обнаруживает суперконформную симметрию [4].

Литература

1. *Wess J., Zumino B.* Phys. Lett. B, 1971, **37**, 95.
2. *Witten E.* Commun. Math. Phys., 1984, **260**, 630.
3. *Braaten E. et al.* Nucl. Phys. B, 1986, **60**, 630.
4. *Di Vecchia P. et al.* Nucl. Phys. B, 1985, **253**, 701.
5. *Ketov S.V.* Nucl. Phys.B, 1987, **294**, 813; Phys. Lett. B, 1988, **207**, 140.
6. *Siegel W.* Phys. Lett. B, 1979, **84**, 193.
7. *Кетов С.В.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **47**, 283.
8. *Grisaru M.T. et al.* Phys. Lett. B, 1986, **173**, 423; Nucl. Phys. B, 1986, **277**, 409.
9. *Freeman M.D. et al.* Phys. Lett. B, 1986, **177**, 124.
10. *Kikuchi K., Marzban C.* Phys. Rev. D, 1987, **35**, 1400.
11. *Gross D.J., Sloan J.H.* Nucl. Phys. B, 1987, **291**, 41.

Институт сильноточной электроники
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 августа 1989 г.