

НЕАБЕЛЕВЫ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ЭЙНШТЕЙНА–ЯНГА–МИЛЛСА

М.С.Волков, Д.В.Гальцов

Построены решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса с группой $SU(2)$, описывающие черные дыры с неабелевой структурой калибровочных полей во внешней области.

Известно, что в случае электровакуума наиболее общим семейством решений, описывающих сферически-симметричные черные дыры, является двухпараметрическое семейство Рейсснера–Нордстрема, характеризующееся массой M и электрическим зарядом Q . Для системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса (ЭЯМ) с группой $SU(2)$ недавно было показано, что аналогичное утверждение справедливо при наличии отличного от нуля цвето-магнитного заряда дыры, при этом структура янг-миллсовских волос эффективно абелева¹. В настоящей работе численно строится семейство существенно неабелевых решений для черных дыр ЭЯМ в случае нулевого магнитного заряда. Решения характеризуются метриками, асимптотически стремящимися к метрике Шварцшильда вдали от горизонта, но в остальном отличными от метрик семейства Рейсснера–Нордстрема. Помимо полной шварцшильдовской массы семейство решений параметризуется дискретной величиной n – числом узлов калибровочной функции, при заданном значении радиуса горизонта события масса решения возрастает с ростом n . При $n = 0$ решение всюду шварцшильдово, а поле Янга–Миллса равно нулю тождественно. Решения при $n \neq 0$ являются новыми и не имеют аналогов в случаях вакуума и электровакуума.

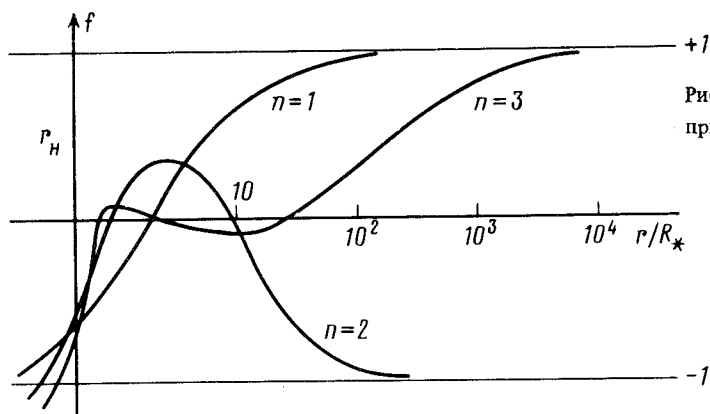


Рис. 1. Вид решений для функции $f(r)$ при $\alpha = 4$

Будем использовать следующее представление для интервала пространства-времени и 1-форм поля Янга–Миллса статической, сферически-симметричной конфигурации с группой $SU(2)$

$$ds^2 = \frac{\Delta(r)}{r^2} \sigma^2(r) dt^2 - \frac{r^2}{\Delta(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

$$A^a_\mu dx^\mu \frac{\tau^a}{2} = \frac{(f(r) - 1)}{g} (\mathbf{e}_\varphi d\theta - \sin\theta \mathbf{e}_\theta d\varphi) \frac{\vec{\tau}}{2}, \quad (2)$$

где \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ – единичные орты сферической системы координат, $\vec{\tau}$ – матрицы Паули, $\Delta(r)$, $\sigma(r)$ и $f(r)$ – функции радиальной переменной, подлежащие определению, g – калибровочная константа связи. Интересующее нас семейство решений задается асимптотическими ус-

ловиями при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\Delta}{r^2} \rightarrow 1, \quad \sigma \rightarrow 1, \quad f \rightarrow \pm 1 \quad (3)$$

вытекающими из предположений об асимптотически-плоском характере метрики и отсутствии магнитного заряда, и наличием горизонта событий

$$\exists r_H > 0 : \Delta(r_H) = 0, \quad \Delta(r) > 0 \text{ при } r > r_H. \quad (4)$$

Исключая функцию σ из системы уравнений ЭЯМ¹, получаем систему двух уравнений для Δ и f

$$Df'' + \left(1 - \alpha \frac{(f^2 - 1)^2}{4x}\right) f' = \frac{f(f^2 - 1)}{2x} \quad (5a)$$

$$D' + \left(\alpha f'^2 - \frac{1}{2x}\right) D = 1 - \alpha \frac{(f^2 - 1)^2}{4x}, \quad (5b)$$

где $x = (r/r_H)^2$, $D = 2\Delta/r^2$, $\alpha = (16\pi/g^2)(l_p/r_H)^2 \equiv (R_*/r_H)^2$, l_p — планковская длина. Функция σ выражается через решение $f(x)$:

$$\sigma(x) = \exp\left(-\alpha \int_1^x f'^2 dx\right). \quad (6)$$

Система уравнений (5а,б) решалась численно методом Рунге–Кутты с использованием начальных данных на горизонте событий $x = 1$. Можно показать, что при заданном α множество начальных данных параметризуется единственной величиной $f^* \in [-1, 0]$:

$$D(1) = 0, \quad f(1) = f^*, \quad f'(1) = f'(f^*). \quad (7)$$

Оказывается, что решения, удовлетворяющие асимптотическому условию (3), соответствуют дискретному набору $f_n^*(\alpha)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При $n = 0$ $f \equiv 1$ и метрика всюду шварц-шильдова. Четным n отвечает асимптотическое значение $f = -1$, нечетным $f = 1$. Качественное поведение решения $f(x)$ при $f(1) = f_n^*(\alpha)$, $n = 1, 2, \dots$ следующее. Функция f возрастает в окрестности горизонта, затем осциллирует, проходя n раз через нуль, после чего асимптотически стремится к значению $(-1)^{n+1}$, при этом $|f(x)| < 1$ на всем интервале $1 \leq x < \infty$, отвечающему внешней области дыры (рис. 1).

Метрическая функция Δ может быть записана в виде $\Delta = r_H^2(x - 2\sqrt{x}m(x))$, где безразмерная массовая функция $m(x)$ монотонно возрастает от значения $m_0 \equiv m(1) = 1/2$ на горизонте до величины $m(\infty) = m_0 + m_n(\alpha)$. Шварцшильдова масса решения равна

$$M_n(\alpha) = \frac{m(\infty)}{\sqrt{\alpha}} M_*, \quad (8)$$

где $M_* = \sqrt{\frac{16\pi}{g^2}} m_p$, m_p — планковская масса. Таким образом, полная масса черной дыры представляется в виде суммы затравочной массы, заключенной под горизонтом и полевой массы, распределенной во внешней области дыры. Функция σ также монотонно возрастает от некоторого значения $\sigma_n^*(\alpha) < 1$ на горизонте до $\sigma = 1$ на бесконечности. При $\alpha \rightarrow 0$ $m_n(\alpha) \rightarrow 0$, $\sigma_n^*(\alpha) \rightarrow 1$ и метрика во внешней области практически не отличается от метрики Шварцшильда, создаваемой массой $M_*/2\sqrt{\alpha}$ (стремящейся к бесконечности). При конечных значениях $\alpha \gtrsim 1$ функция Δ в окрестности горизонта с хорошей точностью аппроксимируется рейсснернордстремовским выражением $\Delta = r^2 - 2M_n(\alpha)r + Q^2$, где $Q^2 \approx \frac{1}{4}R_*^2$,

причем с ростом n размер этой окрестности увеличивается. В общем случае величина Q^2 зависит от r : при r больших некоторого \bar{r} (возрастающего с ростом n), она быстро падает до нуля, тем самым асимптотически метрика оказывается шварцшильдовой. Для шварцшильдовой массы при каждом значении α в этом случае может быть получена эмпирическая зависимость от n , например, при $\alpha = 4$

$$M_n(4) = (0,5 - 0,369 \exp(-2,395n))M_* . \quad (9)$$

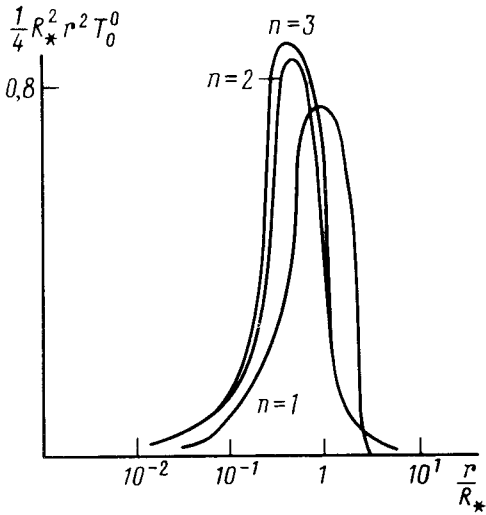


Рис. 2. Плотность энергии внешней полевой конфигурации черной дыры при $\alpha = 10^6$

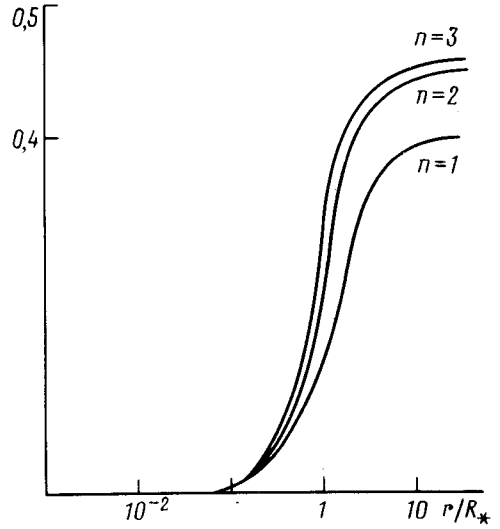


Рис. 3. Поведение массовой функции $M(r) = \frac{m(r)}{\sqrt{\alpha}} M_*$ при $\alpha = 10^6$

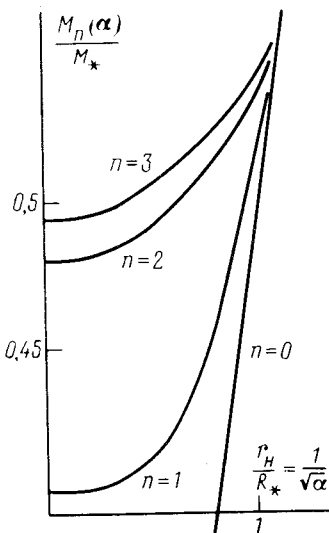


Рис. 4. Зависимость шварцшильдовой массы черной дыры $M_n(\alpha)$ от параметров решения α и n

Продолжение решений под горизонт событий показывает, что имеется, как минимум, еще один внутренний горизонт. При больших α поведение решений слабо зависит от α (начиная со значения $\approx 10^3$). В пределе $\alpha \gtrsim 10^3$ можно выделить три характерные области:

$$r_H = R_* / \sqrt{\alpha} \leq r \leq 0,1 R_*(1), \quad 0,1 R_* \leq r \leq R_* \quad (11),$$

и $R_* \lesssim r$ (111). В области (1) все функции изменяются медленно: $f \approx f^* \approx -1$, $m \approx m_0$, $\sigma \approx \sigma^*$, и метрика близка к шварцшильдовой, отвечающей массе m_0 , и дополнительным замедлением координатного времени: $t \rightarrow t' = \sigma^* t$, при $\alpha \rightarrow \infty$ $1/\sigma_n^*(\infty) = 7,9; 48,1; 297,6$ для $n = 1, 2, 3$ соответственно. В области (11) функция f осциллирует около нуля, плотность энергии $m'(r)$ имеет резкий максимум при $r \approx 0,4R_*$ (рис. 2), а функции m и σ быстро возрастают до асимптотических значений (рис. 3); в этой области сосредоточена почти вся энергия решения. В области (111) метрика шварцшильдова, функция f стремится к асимптотическому значению $(-1)^{n+1}$. В пределе $\alpha \rightarrow \infty$ шварцшильдова масса решений $M_n(\infty)/M_* = 0,414; 0,486; 0,498$ для $n = 1, 2, 3$ соответственно. Во внутренней области черной дыры при больших α отклонение метрики от шварцшильдовой имеет порядок $1/\alpha$ и стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. При $\alpha \rightarrow \infty$ радиус горизонта и затравочная масса решений стремятся к нулю как $1/\sqrt{\alpha}$, поэтому область (1) распространяется вплоть до сингулярности при $r = 0$. Метрика в этой области шварцшильдова с исчезающе малой массой. Интересно, что полные массы полученных в этом пределе решений отличаются (приблизительно в два раза меньше) от соответствующих масс регулярной полевой конфигурации, описанной в ², для которой метрика при $r = 0$ плоская. Это различие обусловлено отличием граничных условий в начале координат.

Таким образом, черные дыры, отвечающие решениям самосогласованной системы уравнений ЭЯМ, образуют более широкое семейство, чем в ранее исследованных случаях вакуума и электровакуума. Это обстоятельство следует иметь в виду при обсуждении гипотезы первичных черных дыр, образующихся на ранней стадии космологического расширения до момента фазового перехода, выделяющего электромагнитные взаимодействия. Описанные решения не дискриминируются известными теоремами об отсутствии волос, поскольку внешняя полевая конфигурация черной дыры находится в состоянии нерадационного мультиполя, однако ее существование не приводит к появлению у дыры калибровочных зарядов вследствие быстрого спадания полей на бесконечности.

Литература

1. Gal'tsov D.V., Ershov A.A. Phys. Lett. A, 1989, 138, 160.
2. Bartnik R., McKinnon J. Phys. Rev. Lett., 1988, 61, 141.

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
7 сентября 1989 г.