Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 8, стр. 344 – 347 *25 октября 1989 г.*

КВАНТОВАНИЕ НА СФЕРЕ И СУПЕРАЛГЕБРЫ ВЫСШИХ СПИНОВ

М.А.Васильев

Устанавливается связь алгебр квантовых операторов на двумерной сфере и гиперболоиде с бесконечномерными алгебрами высших спинов. Отмечается, что параметр квантовой деформации (постоянная Планка) выражается через среднее значение одного из скалярных полей теории высших спинов.

С каждым годом возрастает роль бесконечномерных симметрий в релятивистской теории поля. К алгебрам Вирасоро и Каца – Муди, появившимся в контексте теории струн, недавно добавились алгебры симплектических диффеоморфизмов (скобок Пуассона) двумерных многообразий в теории мембран [1] и бесконечномерные алгебры, связанные с калибровочными теориями высших спинов [2-6]. В [7,8] было установлено, что простейшие варианты алгебр высших спинов, обсуждавшиеся в [2,3,6], можно интерпретировать как результат квантования алгебры скобок Пуассона двумерного гиперболоида при некотором фиксированном значении "постоянной Планка" $\hbar$. Основная цель настоящей работы – дать аналогичную интерпретацию квантовым алгебрам на гиперболоиде и сфере для произвольных значений $\hbar$ в некотором полуинтервале. Предлагаемая ниже конструкция оказывается эффективным техническим средством, позволяя, в частности, легко построить инвариантные квадратичные формы соответствующих (супер) алгебр Ли. Одновременно, она приводит к неожиданной физической интерпретации квантовых алгебр на сфере и гиперболоиде: постоянная Планка выражается через среднее значение одного из вспомогательных скалярных полей работы [5]. Возникающая в результате взаимосвязь эффектов квантования с эффектами спонтанного нарушения симметрии в теориях высших спинов представляется весьма интригующей.

Предлагаемая конструкция сводится к следующему. Введем операторы $q_\alpha (\alpha = 1, 2)$ и Q, по определению подчиненные соотношениям

$$Qq_\alpha = - q_\alpha Q, \quad Q^2 = I, \quad [q_\alpha, q_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \upsilon Q), \tag{1}$$

где υ – произвольный численный параметр ($\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$, $\epsilon_{12} = 1$). Рассмотрим ассоциативную алгебру $Aq(2;\upsilon)$ всевозможных полиномов

$$P(Q, q) = \sum_{\substack{n=0 \\ A=0,1}}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{A\alpha_1 \ldots \alpha_n}(Q)^A q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n} \tag{2}$$

(Численные коэффициенты $f^{A\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ предполагаются полностью симметричными по индексам $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, что отвечает вейлевской расстановке операторов q_α). Алгебра $Aq(2;\upsilon)$ содержит подалгебру четных полиномов $P(Q, -q) = P(Q, q)$, которая в свою очередь распадается в сумму двух алгебр $Aq^E(2;\upsilon) \oplus Aq^E(2;-\upsilon)$, образованных элементами $\Pi_\pm P_\pm(q)$, где $\Pi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm Q)$ и $P_\pm(-q) = P_\pm(q)$.

Пусть

$$x_k = \frac{a}{4}\eta_k^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta, \tag{3}$$

где $a \neq 0$ – вещественный параметр и $\eta_0^{\alpha\beta}$, $\eta_{1,2}^{\alpha\beta}$ – соответственно, единичная матрица и симметричные матрицы Паули $\sigma_{1,3}$. Используя (1), легко показать, что

$$[x_k, q^\alpha] = ia\eta_k^{\alpha\gamma} q_\gamma , \qquad [x_k, x_l] = 2ia\epsilon_{kln} x^n, \tag{4}$$

где $q^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} q_\beta$, и векторные индексы $k, l, n = 0, 1, 2$ сворачиваются $2+1$-метрикой Минковского $(+--)$. В результате, независимо от величины υ, x_k обладают свойствами генераторов $o(2,1) \sim \mathrm{sp}(2)$, а q_α образуют спинорное представление $o(2,1)$. Кроме того, простое вычисление дает $x_k x^k = \frac{1}{4} a^2 (\upsilon^2 - 2\upsilon Q - 3)$. Проектируя все соотношения на $Aq^E(2;\upsilon)$ с помощью Π_+, получаем

$$x_k x^k = \frac{a^2}{4} (\upsilon + 1)(\upsilon - 3), \tag{5}$$

т. е. x_k можно интерпретировать как координаты двумерного гиперболоида радиуса $R^2 = \frac{a^2}{4}(\upsilon + 1)(\upsilon - 3)$, проквантованные с постоянной Планка $\hbar = 2a$, а алгебру $Aq^E(2;\upsilon)$ — как алгебру операторов, построенных из x_k, т. е. как алгебру квантовых операторов на гиперболоиде $S^{1,1}$. Отметим, что существенным параметром задачи является безразмерное отношение $R^2/a^2 = \frac{1}{4}(\upsilon + 1)(\upsilon - 3)$. Супералгебры высших спинов, обсуждавшиеся в [7, 8], отвечают случаю $\upsilon = 0$, т. е. $R^2/a^2 = -3/4$. Предложенная реализация описывает все квантовые алгебры на $S^{1,1}$ с $R^2/a^2 \geqslant -1$.

На алгебрах $Aq(2;\upsilon)$ существует операция суперследа, которая для любого полинома (2) задается соотношением

$$\mathrm{str}(P) = f^0 - \upsilon f^1 , \tag{6}$$

где f^0 и f^1 — коэффициенты при нулевых степенях по q. Эта операция обладает обычным свойством

$$\mathrm{str}(P_1 P_2) = -(-1)^{(\pi(P_1)+1)(\pi(P_2)+1)} \mathrm{str}(P_2 P_1) , \tag{7}$$

если четность задать соотношением

$$P(Q, -q) = (-1)^{\pi(P)} P(Q, q), \tag{8}$$

что отвечает нормальной связи спина и статистики. Операция str позволяет построить инвариантные полилинейные формы супералгебр Ли, определяемых через антикоммутаторы по алгебре $Aq(2;\upsilon)$ и четности (8), как следы произведений. Инвариантная билинейная форма $(P_1, P_2) = \mathrm{str}(P_1 P_2)$ имеет вид

$$(P_1, P_2) = \sum_{\substack{n=0 \\ A,B=0,1}}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^{AB}(n) f_1^{A}{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} f_2^{B\alpha_1 \ldots \alpha_n} , \tag{9}$$

$$\alpha^{AB}(n) = i^n \prod_{l=0}^{[n/2]} \left(1 - \frac{\upsilon^2}{(2l+1)^2}\right) \left[\delta(A+B) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \frac{\upsilon}{n+1} \delta(A+B+1)\right] \tag{10}$$

при $n > 0$ и $\alpha^{AB}(0) = \delta(A+B)$ (здесь $[m/2]$ обозначает целую часть $m/2$, индексы A и B складываются по модулю два $(1+1=0)$, $\delta(0) = 1$ и $\delta(1) = 0$).

Из (10) вытекает, что форма (9) вырождается тогда и только тогда, когда $\upsilon = 2k+1$ для некоторого целого k. Оказывается, что в этих случаях комплексная фактор алгебра

$Aq(2;2k+1)/I_k$, где I_k — двусторонний идеал, образованный нуль-векторами формы (9), совпадает с алгеброй матриц $(2k+1)\times(2k+1)$. Это приводит к неожиданной интерпретации конечномерных ассоциативных матричных алгебр (а после перехода к антикоммутаторам, и связанных с ними классических супералгебр Ли) как частных случаев бесконечномерных алгебр $Aq(2;\upsilon)$ при нечетных υ. Такая интерпретация становится точной для выражений под знаком суперследа (например, совпадают соответствующие формы Черна—Саймонса).

При обсуждении квантовой алгебры на гиперболоиде неявно предполагалось[1]. что $q_\alpha^\dagger = q_\alpha$, $Q^\dagger = Q$ и, следовательно, $x_k^\dagger = x_k$ (параметр υ — вещественный). Отвечающая этим условиям эрмитовости вещественная бесконечномерная супералгебра Ли $h(2;\upsilon)$ может рассматриваться как новая версия супералгебры высших спинов в 2 + 1 измерении, отличающаяся от предложенной в [6]. К ее достоинствам следует отнести то, что она естественным образом содержит $d = 2+1$-алгебру анти-де-Ситтера $o_+(2,1)\oplus o_-(2,1)$, слагаемые которой выделяются проекторами[2] $\Pi_\pm$.

Случаю сферы отвечают условия эрмитовости $q_\alpha^\dagger = Qq^\alpha$, $Q^\dagger = Q$. Определяя координаты сферы соотношением $x_k = \frac{a}{4} i q_\alpha q_\beta \sigma_k^{\alpha\beta}$, где $\sigma_{k\alpha}{}^\beta$ — матрицы Паули $(k = 1, 2, 3)$, получаем

$$x_k^\dagger = x_k, \quad [x_k, x_l] = 2i\epsilon_{kln}\, x^n, \quad x_k x^k = -\frac{a^2}{4}(Q\upsilon+1)(Q\upsilon-3) \tag{11}$$

(индексы сворачиваются метрикой $(+++)$). Разлагая алгебру полиномов от x_k и Q в сумму двух подалгебр с помощью $\Pi_\pm$, получаем для одной из них $x_k^2 = -\frac{a^2}{4}(\upsilon+1)(\upsilon-3)$, т. е. таким способом удается описать алгебры с $x_k^2/a^2 \leqslant 1$ (кроме того, заключаем, что при $\upsilon \leqslant -1$ и $\upsilon \geqslant 3$ рассматриваемая алгебра не допускает унитарных представлений, так как x_k^2 становится отрицательным).

Наконец, укажем еще одну возможность, состоящую в том, чтобы взять два взаимно коммутативных набора операторов (q_α, Q) и $(r_{\dot\alpha}, R)$ со взаимно сопряженными параметрами υ и $\bar\upsilon$, положив $(q_\alpha)^\dagger = r_{\dot\alpha}$, $Q^\dagger = R$. Эта модель отвечает комплексной сфере с алгеброй Лоренца $o(3;\mathbb{C}) \sim o(3,1)$ в качестве алгебры симметрии. При $\upsilon = 0$ соответствующая супералгебра Ли совпадает с супералгеброй высших спинов и вспомогательных полей [4], использованной в [5] для формулировки уравнений движения калибровочных высших спинов в $d = 3+1$. Замечательно, что параметр υ в (1) может интерпретироваться как среднее значение вспомогательного поля $C^{00}(0,0)$ работы [5], что указывает на глубокую связь задачи о калибровочных полях высших спинов с геометрией двумерных многообразий.

Литература

1. *Hoppe J.* Aachen preprint PI THA 86/24; Ph. D. thesis MIT, 1982.
2. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Ann. Phys. (N.Y.), 1987, 177, 63.

---

1) Выписываемые ниже условия эрмитовости имеют смысл не для ассоциативных алгебр, а для связанных с ними супералгебр Ли, аналогично тому, как обычные условия эрмитовости, выделяющие алгебру Ли $u(n)$, не могут быть наложены на уровне ассоциативной алгебры матриц.

2) Лоренцева связность отвечает диагональной подалгебре $o_L(2,1)$, а 1-форма тетрады лежит в $o_+(2,1) \oplus o_-(2,1)/o_L(2,1)$. Алгебра $h(2;0)$ отличается от алгебр, обсуждавшихся в [6], своим фермионным сектором, который соответствует полям вспомогательного типа, описанным в 9 для случая $d = 3+1$. Подчеркнем, что вопрос о том, что называть безмассовым полем высшего спина в $d = 2+1$ не имеет четкого физического смысла, т. к. такие поля не обладают собственными степенями свободы.

3. *Vasiliev M.A.* Fortschr. Phys., 1988, **36**, 33.
4. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Int. J. Mod. Phys. A, 1988, **3**, 2983.
5. *Vasiliev M.A.* Ann. Phys. (N.Y.), 1989, **190**, 59.
6. *Blencowe M.P.* Class. Quant. Grav., 1989, **6**, 443.
7. *Bergshoeff E. et al.* Preprint Imperial /TH/88-89, № 9.
8. *Bordemann M. et al.* Karlsruhe preprint KA-THEP-10, 1989.
9. *Vasiliev M.A.* Nucl. Phys., B, 1988, **307**, 319.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 сентября 1989 г.