Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 11, стр. 441 – 445 *10 декабря 1989 г.*

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ КОСЕТ-МОДЕЛИ В ТЕРМИНАХ СВОБОДНЫХ СУПЕРПОЛЕЙ

А.М.Семихатов

Предлагается построение явно $N = 1$ суперсимметричных $N = 2$ моделей Казамы и Сузуки через свободные $N = 1$ суперполя путем надлежащего $N = 1$ обобщения бозонизации Вакимото. Явные построения проделаны для супер-$SL(2)/U(1)$ косет-теории, что дает $N = 2$ минимальные модели.

Основная задача теории струн – описание четырехмерной физики – решается посредством компактификации на шестимерных многообразиях Калаби–Яо. Очень важным явилось открытие эквивалентного описания этих компактификаций в терминах двумерных $N = 2$ суперконформных теорий [1]. Помимо минимальных $N = 2$ моделей [2,3], значительное число соответствующих многообразиям Калаби–Яо новых $N = 2$ теорий было найдено в [4]. В настоящей заметке обращается внимание на возможность описания этих теорий в терминах свободных суперполей, следующего из применения надлежащего обобщения бозонизации Вакимото–Фейгина–Френкеля–Замолодчикова–Доценко–. . . (Вакимото для краткости) моделей Весса–Зумино–Виттена (ВЗВ) и связанных с ними теорий [5-12]. Ниже супербозонизация Вакимото строится в простейшем случае $SL(2)$, но она легко может быть проведена и для произвольных (полу)простых алгебр Ли, в духе работ [9-11], посвященных $N = 0$ случаю. Мы получаем $N = 1$ суперполевое описание – в точности то, что требуется для $N = 1$ обобщения [4] косет-конструкции ГКО [13]. При этом описание в терминах *свободных* $N = 1$ суперполей дает возможность явно проверять, является ли какая-нибудь $N = 1$ косет-модель в действительности $N = 2$ суперсимметричной: кандидат на необходимый для $N = 2$ суперсимметрии так наз. '$U(1)$-(супер)ток' естественным образом следует из алгебры токов, и явная проверка требуемых операторных разложений легко проводится в свободной теории. Эта процедура, тем самым, должна дать независимый вывод критерия того, является ли данная $N = 1$ косет модель на самом деле $N = 2$ суперсимметричной ([4], см, также [14]).

Подобная программа развивается ниже на простейшем примере супер-$SL(2)/U(1)$ конструкции, приводящей к $N = 2$ минимальным моделям.

Напомним, что обычная бозонизация Вакимото для $SL(2)$ строится с помощью пары коммутирующих полей первого порядка ($\beta\gamma$ системы спина 1) и независимого скалярного поля ψ. Нашим первым шагом будет аналогичная супербозонизация для $N=1$ $SL(2)$ теории ВЗВ, которая описывается тремя фермионными суперполями конформной размерности 1/2 с операторными произведениями [15-17]

$$J^0(1)J^\pm(2)=2\frac{\theta_{12}}{z_{12}}J^\pm,\quad J^+(1)J^-(2)=-\frac{k}{z_{12}}-\frac{\theta_{12}}{z_{12}}J^0,\quad J^0(1)J^0(2)=2\frac{k}{z_{12}},\quad (1a,b,c)$$

где, как обычно, $\theta_{12}=\theta_1-\theta_2$, $z_{12}=z_1-z_2-\theta_1\theta_2$ и, в дальнейшем, также $D=\partial/\partial\theta+\theta\partial/\partial z$, $\partial=\partial/\partial z$.

Для того, чтобы бозонизовать три "тока" $J^\pm$, J^0, мы используем комбинированную систему коммутирующих и антикоммутирующих полей порядка, $\beta\gamma$ и bc, составляющих два суперполя B и C конформных размерностей 1/2 и 0 соответственно[1)] :

$$B=b+\theta\beta,\quad C=\gamma+\theta c\quad B(1)C(2)=-\theta_{12}/z_{12}\tag{2}$$

Теперь мы полагаем, по аналогии с $N=0$ случаем,

$$J^+=B,\quad J^0=\sqrt{2k}\partial\Psi+2BC,\quad J^-=BC^2+\sqrt{2k}CD\Psi+kDC,\qquad (3a,b,c)$$

где Ψ – скалярное суперполе с обычным операторным произведением

$$D\Psi(1)D\Psi(2)=\frac{1}{z_{12}}.\tag{4}$$

Тогда желаемые супер-$SL(2)$ операторные произведения (т.е. сингулярности в (1)) действительно воспроизводятся. Помимо сингулярностей, однако, нам будут нужны и конечные части операторных произведений, т.е. составные операторы вида: J^aJ^b :, выраженные через поля BC–Ψ-теории. Так, в равенстве (1b) находим:

$$J^+(1)J^-(2)=-\frac{k}{z_{12}}-\frac{\theta_{12}}{z_{12}}J^0+k\mathcal{H},\quad \mathcal{H}=BDC+\sqrt{\frac{2}{k}}BCD\Psi.\tag{5}$$

Для супер тензора энергии-импульса (здесь и далее – в секторе Неве–Шварца) [20,17] имеем

$$T=-\frac{1}{2k}:(DJ^a)J^a:+\frac{1}{6}f^{abc}:J^a:J^bJ^c::=-\frac{1}{2}DBDC-\frac{1}{2}B\partial C+\frac{1}{2}\partial\Psi D\Psi-\frac{1}{\sqrt{2k}}\partial D\Psi.\tag{6}$$

Первые два слагаемых в правой части составляют супер тензор энергии-импульса в BC теории (ср. ур. на стр. 252 работы [18], с переобозначенными полями $B\leftrightarrow C$; см. также [19]). Отметим, что член BDC в (5) является $N=2$ $U(1)$-супертоком в BC-теории [18,19].

BC-система может быть в свою очередь "супер" бозонизована как [18,19]

$$B=-e^{-\phi}D\bar\phi,\quad C=e^\phi,\quad \phi(1)\phi(2)=\log z_{12},\tag{7}$$

где ϕ и $\bar\phi$, таким образом, являются скалярными суперполями (с несингулярными $\phi\phi$ и $\bar\phi\bar\phi$). Это дает для $SL(2)$-супертоков

$$J^+=-D\bar\phi e^{-\phi},\quad J^0=\sqrt{2k}\partial\Psi-2D\bar\phi,\quad J^-=(\sqrt{2k}D\Psi+kD\phi-D\bar\phi)e^\phi.\quad (8a,b,c)$$

Эти и подобные выражения следуют из основного операторного разложения

$$B(1)C(2)=-\frac{\theta_{12}}{z_{12}}-D\bar\phi(2)+\theta_{12}(-\partial\bar\phi(2)+\partial\phi(2)+D\phi(2)D\bar\phi(2))+z_{12}(\partial\phi(2)D\phi(2)-\partial D\bar\phi(2))\tag{9}$$

---

1) Поскольку в нашем случае размерность $\beta\gamma$ системы на 1/2 больше, чем размерность bc системы, тогда как в традиционном описании она на 1/2 меньше, структура суперполей в (2) не является стандартной.

(плюс старшие члены). В частности, супер тензор энергии-импульса принимает вид

$$T = \frac{1}{2} D\phi\partial\bar{\phi} + \frac{1}{2}\partial\phi D\bar{\phi} - \frac{1}{2}\partial D\phi + \frac{1}{2}\partial\Psi D\Psi - \frac{1}{\sqrt{2k}}\partial D\Psi. \tag{10}$$

Приведем также выражения для примарных полей супер-$SL(2)$ модели ВЗВ в терминах вертексных операторов:

$$V_{j,m} = e^{\sqrt{\frac{2}{k}} j\Psi} e^{(j-m)\phi} \tag{11}$$

где $m = -j, -j+1, \ldots, j$ [2]. Они удовлетворяют правилам слияния

$$J^{\pm}(1)V_{j,m}(2) = \mp (j \mp m)\frac{\theta_{12}}{z_{12}} V_{j,m\pm 1}, \quad J^0(1)V_{j,m}(2) = 2m\frac{\theta_{12}}{z_{12}} V_{j,m}.$$

(Отметим, что существует также "сопряженный" набор вертексных операторов, представляющих комодуль Вакимото, но мы не будем обсуждать их здесь).

Следующим шагом в построении супер-$SL(2)/U(1)$ косет-модели будет отделение $U(1)$-фактора в вышеприведенных операторах. Это легко достигается введением нового базиса в пространстве трех скаляров:

$$DV = D\bar{\phi}, \quad DU = D\Psi + \sqrt{\frac{2}{k}} BC = D\Psi - \sqrt{\frac{2}{k}} D\bar{\phi} \tag{12a, b}$$

$$DW = \frac{1}{k} BC + \sqrt{\frac{2}{k}} D\Psi + D\log C = \sqrt{\frac{2}{k}} D\Psi + D\phi - \frac{1}{k} D\bar{\phi}, \tag{12c}$$

где DU есть по существу J^0, а два других тока DV и DW ортогональны DU в смысле операторных произведений, т.е. не имеют сингулярностей при слиянии с DU. Находим

$$DU(1)DU(2) = \frac{1}{z_{12}}, \quad DV(1)DW(2) = \frac{1}{z_{12}} \tag{13}$$

с несингулярными $DVDV$ и $DWDW$.

Супер тензор энергии-импульса теперь распадается на $U(1)$- и $SL(2)/U(1)$-части:

$$T = \frac{1}{2} DW\partial V + \frac{1}{2} DV\partial W - \frac{1}{2} D\partial W - \frac{1}{2k}\partial DV + \frac{1}{2} DU\partial U \equiv T_{min} + \frac{1}{2} DU\partial U, \tag{14}$$

и явное вычисление показывает, что супер тензор энергии-импульса косет-модели, T_{min}, имеет операторное разложение

$$T_{min}(1)T_{min}(2) = \frac{k-2}{2k}\frac{1}{z_{12}^3} + \ldots \tag{15}$$

т.е. мы получили $N = 2$ минимальную модель с центральным зарядом $c = \frac{3\hat{k}}{\hat{k}+2}$, где $\hat{k} = k - 2$ [3].

В $N = 2$ модели должен существовать суперток $\mathcal{H}_{min}$ со свойствами

$$\mathcal{H}_{min}(1)\mathcal{H}_{min}(2) = \frac{c/3}{z_{12}^2} + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} 2T_{min} \tag{16}$$

---

[2] В бозонизованном варианте не видно наличия ограничения $j \leqslant \hat{k}/2$ [22]. Это может являться указанием на некоторую неполноту описания. Случай $N = 0$ также страдает от отсутствия явного ограничения на j.

[3] Нормировка центрального заряда соответствует $N = 0$-описанию, так что для *супер* тензора энергии-импульса имеем $T(1)T(2) = \frac{c}{6}\frac{1}{z_{12}^3} + \ldots$

$$T_{min}(1)\mathcal{H}_{min}(2) = \frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}\mathcal{H}_{min}(2) + \frac{1}{2}\frac{1}{z_{12}}D\mathcal{H}_{min}(2) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial\mathcal{H}_{min}(2) \quad (17)$$

Мы уже отмечали, что подобными свойствами в BC-теории обладает первое слагаемое в (5). Суперток $\mathcal{H}$ действительно дает нужный нам $\mathcal{H}_{min}$ после отделения $U(1)$-части:

$$\mathcal{H} = \partial\phi + D\phi D\bar{\phi} + \sqrt{\frac{2}{k}}\, D\Psi D\bar{\Psi} = \partial W - \frac{1}{k}\partial V + DWDV - \sqrt{\frac{2}{k}}\,\partial U \equiv \mathcal{H}_{min} - \sqrt{\frac{2}{k}}\,\partial U. \quad (18)$$

Операторные произведения (16, 17) теперь легко проверяются.

Отделяя $U(1)$-вклад в вертексных операторах, получаем

$$V_{j,m} = e^{m\sqrt{\frac{2}{k}}U} M_{j,m}, \quad M_{j,m} = e^{\frac{j+m}{k}V} e^{(j-m)W}. \quad (19)$$

Вертексные операторы $M_{j,m}$, представляющие примарные поля минимальной модели,характеризуются своими размерностями и $\mathcal{H}_{min}$-зарядами [4)], определяемыми из разложений

$$\mathcal{H}_{min}(1)M_{j,m}(2) = \frac{2m}{k}\frac{1}{z_{12}}M_{j,m}(2) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}DM_{j,m}(2) \quad (20)$$

$$T_{min}(1)M_{j,m}(2) = \frac{j(j+1)-m^2}{k}\frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}M_{j,m}(2) + \frac{1}{2}\frac{1}{z_{12}}DM_{j,m}(2) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial M_{j,m}(2). \quad (21)$$

Здесь, однако, j (и потому m) пробегают целые и *полуцелые* значения. Чтобы иметь дело только с целыми, введем $l = 2j$, $q = 2m$. Тогда получаем вертексные операторы, размерности и $U(1)$-заряды равными (напомним, что $\hat{k} = k - 2$)

$$M(l,q) = e^{\frac{l+q}{2k}V} e^{\frac{l-q}{2}W}, \quad \Delta(l,q) = \frac{l(l+2)-q^2}{4(\hat{k}+2)}, \quad Q(l,q) = \frac{q}{(\hat{k}+2)}, \quad q = -l, -l+2, \ldots, l, \quad (22)$$

что совпадает с известными значениями в секторе Неве–Шварца [2,3,22 5)]. Отметим еще существование других представителей примарных полей с теми же размерностями и $U(1)$-зарядами:

$$\tilde{M}(l,q) = e^{\frac{q-l-2}{2k}V} e^{-\frac{l+q+2}{2}W}. \quad (23)$$

Эти $\tilde{M}(l,q)$ должны использоваться наряду с операторами $M(l,q)$ при построении корреляционных функций, как в [23,7,8,6,9]. Корреляционные функции теперь легко выражаются (скажем, для четыреххвостки) через объекты, которые естественно называть супергипергеометрическими функциями. Подразумеваются, конечно, должные вставки экранирующих операторов в корреляционные функции [23,7,8].

Рамоновский сектор $N = 2$ минимальных моделей, явное построение корреляционных функций, а также приложения к собственно теориям Казамы и Сузуки будут рассмотрены в более подробной публикации.

---

4) Теперь, когда $U(1)$-фактор из $SL(2)/U(1)$ уже устранен, мы можем не опасаясь недоразумений называть суперток $\mathcal{H}_{min}$ $U(1)$-током и $\mathcal{H}_{min}$-заряд $U(1)$-зарядом, как это принято в $N = 2$ суперсимметрии.

5) По-прежнему (см. примеч. 2)) нет ограничения $l \leqslant k$, ни даже (пока мы не пытаемся получить корреляционные функции) указания на целочисленность k.

Литература

1. *Gepner D.* Nucl. Phys. B, 1988, **296**, 757; PUPT-1121, April 1989.
2. *Di Vecchia P. et al.* Phys. Lett. B, 1986, **172**, 211; *Di Vecchia P. et al.* Phys. Lett. B, 1986, **174**, 280
3. *Boucher W.et al.* Phys. Lett. B, 1986, **172**, 316.
4. *Kazama Y., Suzuki H.* Nucl. Phys. B, 1989, **231**, 232.
5. *Wakimoto M.* Commun. Math. Phys., 1986, **104**, 605; *Фейгин Б., Френкель Е.* Усп. Мат. Наук, 1988, **43**, № 5, 227.
6. *Dotsenko V.S.* 1989, talk at the Aloushta Conference (April 1989).
7. *Маршаков А.В.* Письма в ЖЭТФ, 1989, **49**, 369.
8. *Gerasimov A. et al.* ITEP-64-89.
9. *Gerasimov A. et al.* ITEP-72-89.
10. *Bershadsky M., Ooguri H.* IASSNS-HEP-89/109.
11. *Gerasimov A. et al.* ITEP-73-89.
12. *Bilal A.* Phys. Lett. B, 1989, **226**, 272.
13. *Goddard P. et al.* Comm. Math. Phys., 1987, **113**, 1.
14. *Lynker M., Schimmrigk R.* Phys. Lett. B, 1988, **208**, 216; *Lutken C.A., Ross G.G.* Phys. Lett. B, 1988, **213**, **152**.
15. *Di Vecchia P. et al.* Nucl. Phys. B, 1985, **253**, 701; *Nemeschansky D., Yankielowicz.* S. Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 620; Ibid., 1985, **54**, 1736; *Redlich A.N., Schnitzer H.T.* Phys. Lett. B, 1985, **167**, 337.
16. *Kac V.G., Todorov I.T.* Comm. Math . Phys., 1985, **102**, 337.
17. *Fuchs J.* Nucl. Phys. B, 1989, **318**, 631.
18. *Martinec E., Sotkov G.M.* Phys. Lett. B, 1988, **208**, 249.
19. *Takama H.* Phys. Lett. B, 1988, **210**, 153.
20. *Fuch J.* Nucl. Phys. B, 1987, **286**, 455; *Kiritsis E., Siopsis G.* Phys. Lett. B, 1987, **184**, 353; ibid., 1987, **189**, 489; *Nam S.* Phys. Lett. B, 1987, **187**, 340.
21. *Gepner D., Witten E.* Nucl. Phys. B, 1986, **278**, 493.
22. *Yu M., Zheng H.B.* Nucl. Phys. B, 1987, **288**, 275.
23. *Dotsenko V.S. , Fateev V.A.* Nucl. Phys. B, 1984, **240**, 312.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 ноября 1989 г.