

# ПАРАМЕТРЫ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕЗОНАНСНЫХ КУЛОНОВСКИХ СИСТЕМ

*В.Д.Мур, Б.М.Карнаков, С.Г.Поздняков, В.С.Попов\**

*Московский инженерно-физический институт*

*115409, Москва, Россия*

*\*Институт теоретической и экспериментальной физики*

*117259, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 июля 1992 г.

Получена формула для ядерно-кулоновского эффективного радиуса  $r_i^{(cs)}$ , применимая при произвольном угловом моменте  $l$  и приводящая к ограничениям на величину  $r_i^{(cs)}$ , не зависящим от формы сильного потенциала. Вычислены длины рассеяния и эффективные радиусы для легчайших адронных систем.

**1. Исследование низкоэнергетических резонансов в легчайших адронных системах** ( $dt$ ,  $d^3\text{He}$ ,  $\alpha\alpha$ ,  ${}^7\text{Li}p$  и др.) представляет большой интерес для ядерной физики, астрофизики, термоядерного синтеза (включая  $\mu$ -катализ), и так далее. В настоящее время с высокой точностью измерены сечения реакций синтеза  $dt \rightarrow n\alpha$  и  $d^3\text{He} \rightarrow p\alpha$  в окрестности  $s$ -волновых резонансов  ${}^5\text{He}^*(3/2^+)$  и  ${}^5\text{Li}^*(3/2^+)$  – см., например, обзор <sup>1</sup>, однако надежный фазовый анализ упругого рассеяния отсутствует. В этих системах резонансная волна ( $l = 0$ ,  $J^P = 3/2^+$ ) играет доминирующую роль как в упругом рассеянии, так и в реакции синтеза, которая и определяет, в основном, сечение реакции  $\sigma_r$ . Как показано в <sup>2</sup>, амплитуду упругого рассеяния медленных заряженных частиц (в отличие от нейтральных) можно восстановить из данных по сечению  $\sigma_r(E)$ , что позволяет найти комплексные длину рассеяния  $a_{cs}$  и эффективный радиус  $r_{cs}(l=0)$ :  $a_B/a_{cs} = \alpha_0 - i\beta_0$ ,  $r_{cs}/a_B = 2(\alpha_1 - i\beta_1)$ . Точность определения каждого из этих параметров достаточно высока, порядка нескольких процентов; однако согласованное изменение всех четырех низкоэнергетических параметров  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  допускает их изменение в довольно широком интервале при несущественном увеличении  $\chi^2$ . Это иллюстрирует (на примере  $dt$ -системы) таблица 1, в которой значения  $a_{cs}$  и  $r_{cs}$  меняются в 2 раза. Таким образом, возникает необходимость в дополнительных критериях отбора.

Таблица 1

$\alpha_0$	$-a_{cs}$	$r_{cs}$	$R_c$	$\chi^2$
0,20	$112 + i31,0$	$6,4 - i0,36$	11,3	2,00
0,21	$105 + i31,2$	$6,2 - i0,32$	10,1	1,28
0,22	$99 + i31,3$	$6,0 - i0,28$	9,2	0,85
0,23	$94 + i31,4$	$5,8 - i0,26$	8,4	0,66
0,238	$90 + i31,4$	$5,7 - i0,25$	7,8	0,62
0,26	$80 + i31,2$	$5,2 - i0,30$	6,2	0,67
0,28	$73 + i30,9$	$4,6 - i0,34$	5,0	0,82
0,30	$66 + i30,5$	$3,9 - i0,36$	3,7	0,90
0,32	$60 + i30,3$	$3,2 - i0,23$	2,7	1,08

*Примечание.* Приведенные в таблице наборы низкоэнергетических параметров  $dt$ -системы соответствуют локальному минимуму  $\chi^2$  (на одну экспериментальную точку) при фиксированном  $\alpha_0$ . Значения  $a_{cs}$ ,  $r_{cs}$  и  $R_c$  даны здесь в Фм.

Таким критерием может служить ограничение на величину  $r_{cs}$ , связанное с кулоновской перенормировкой параметров рассеяния, которая несколько неожиданным образом, становится весьма существенной при  $r_N > a_B$  (в отличие от случая  $r_N/a_B \ll 1$ , рассмотренного, например, в<sup>3</sup> в связи с теорией  $p\bar{p}$ -атома). Здесь  $a_B = \hbar^2/Z_1 Z_2 e^2 m$  – боровский радиус системы,  $m$  - приведенная масса,  $r_N$  – радиус действия ядерных сил (мы рассматриваем случай кулоновского отталкивания, то есть  $Z_1 Z_2 > 0$ ).

2. Ядерно-кулоновскими (*cs*) низкоэнергетическими параметрами называются коэффициенты разложения функции эффективного радиуса<sup>1)</sup> по степеням  $k^2$ :

$$K_l^{(cs)}(k^2) = -1/a_l^{(cs)} + \frac{1}{2} r_l^{(cs)} k^2 + O(k^4). \quad (1)$$

Эффективный радиус  $r_l^{(cs)}$  можно выразить через радиальную волновую функцию с нулевой энергией,  $\varphi_l(r) \equiv r R_l(r, k=0)$ :

$$\begin{aligned} r_l^{(cs)} = & \frac{a_B^{1-2l}}{3(l!)^2} - 2[(2l-1)!!]^2 \int_0^\infty \{\varphi_l^2(r) + \\ & + \frac{2}{a_l^{(cs)}} g_l(r) f_l(r) - \frac{1}{[a_l^{(cs)}]^2} f_l^2(r)\} dr. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $g_l(r)$  и  $f_l(r)$  являются решениями уравнения Шредингера с  $E=0$  в кулоновском поле отталкивания:

$$g_l = \frac{2^{2l}}{(2l)! a_B^l} \rho K_{2l+1}(\rho), \quad f_l = \frac{2^{l-2}(l!)^2}{(2l)!} a_B^{l+1} \rho I_{2l+1}(\rho), \quad (2')$$

$\rho = (8r/a_B)^{1/2}$ ,  $K_{2l+1}(\rho)$  и  $I_{2l+1}(\rho)$  – функции Бесселя от мнимого аргумента, а функция  $\varphi_l(r)$  нормирована асимптотическим условием:

$$\varphi_l(r) = g_l(r) - \frac{1}{a_l^{(cs)}} f_l(r), \quad r \gg r_N \quad (2'')$$

(вывод формулы (2) будет дан в более подробной публикации).

В точном резонансе (то есть в момент возникновения связанного *l*-уровня) имеем:  $a_l^{(cs)} = \infty$ ,  $\varphi_l(r) \equiv \chi_l(r)$ , причем  $\chi_l(r) \propto r^{l+1}$  при  $r \rightarrow 0$  и экспоненциально затухает на бесконечности:

$$\chi_l(r) = g_l(r) = \text{const} r^{1/4} \exp\{-(8r/a_B)^{1/2}\}, \quad (3)$$

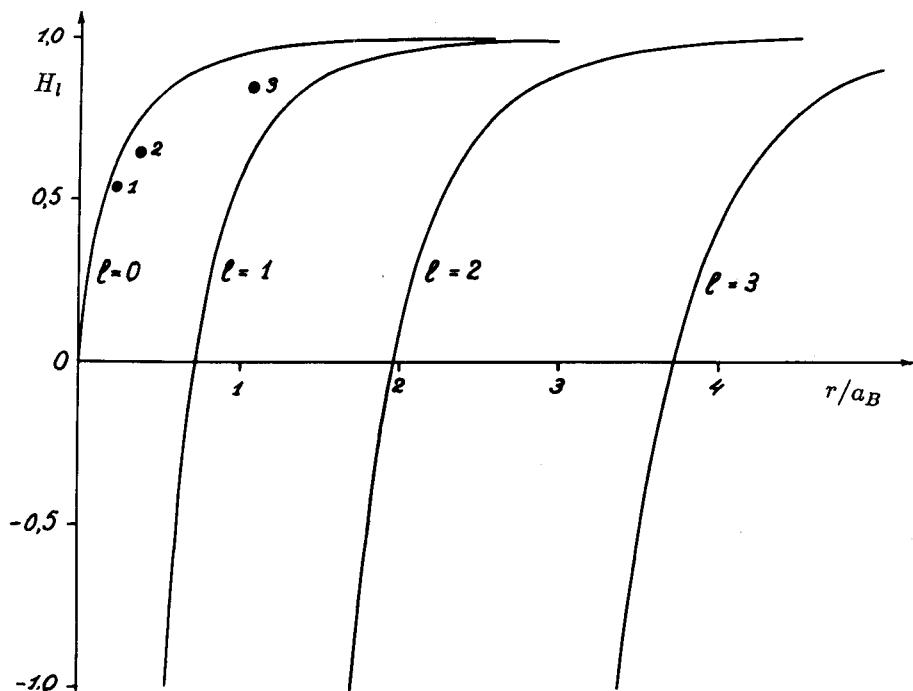
что обязано кулоновскому барьеру. Формула (2) при этом значительно упрощается; соответствующее значение эффективного радиуса обозначим  $\tilde{r}_l^{(cs)}$ .

3. Пусть  $R_c$  – минимальное расстояние, начиная с которого сильное взаимодействие пренебрежимо мало по сравнению с кулоновским. Учитывая (2) и (3) получаем:

$$\tilde{r}_l^{(cs)} \leq \frac{a_B^{1-2l}}{3(l!)^2} H_l(R_c), \quad (4)$$

<sup>1)</sup>Ее стандартное определение при произвольном угловом моменте можно найти, например, в 4,5

где  $H_l(r) = 1 - 3/2 \int_{\rho}^{\infty} K_{2l+1}^2(x) x^3 dx$ , см. рисунок (знак равенства в (4) достигается для брейтовской модели<sup>6</sup> сильного потенциала  $V_s(r)$ ).



Функция  $H_l$  в зависимости от  $r/a_B$ . Точки 1, 2 и 3 соответствуют  $dt$ -,  $d^3\text{He}$ - и  $\alpha\alpha$ -системам (их абсцисса есть  $r_N/a_B$ , а ордината –  $-3r_{cs}/a_B$ )

Проиллюстрируем эффективность этого ограничения. В таблице 1 приведены оптимальные варианты подгонки низкоэнергетических параметров  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , которые все проходят по критерию  $\chi^2$  (за исключением, быть может, первого набора). Абсолютному минимуму  $\chi^2$  отвечает набор с  $\alpha_0 = 0,238$ , приводящий, однако, к физически неприемлемому<sup>2)</sup> значению  $R_c \approx 8 \text{ Фм}$  (тем более исключаются три первых набора параметров из таблицы 1). Представляется разумным считать, что  $R_c - r_N \sim \delta \approx 1 \text{ Фм}$ , где  $\delta$  – диффузность края ядра. Как ясно из таблицы 1, это условие совместно с (4) резко уменьшает неопределенность извлечения  $a_{cs}$  и  $r_{cs}$  из экспериментальных данных по сечению реакции.

Результаты вычислений см. в таблице 2. Радиусы  $r_{cs}$  для  $s$ -волновых резонансов удовлетворяют как условию минимума  $\chi^2$ , так и неравенству (4). Из рисунка видно, что последнее ограничение является существенным, так как рассчитанные нами точки<sup>3)</sup> близки к верхнему пределу (4), соответствующему

<sup>2)</sup> В  $R$ -матричном подходе обычно полагают радиус заряженного канала для  $dt$ -системы  $R_c = 5 \text{ Фм}$ .

<sup>3)</sup> При их расчете для  $dt$  и  $d^3\text{He}$  была внесена поправка на "недосвязанность" этих систем, то есть на отличие  $4/a_{cs}$  от нуля (без учета этой поправки соответствующие точки ложатся на предельную кривую (4)).

сплошной кривой  $l=0$ . С другой стороны, для немногих рассмотренных нами резонансов с  $l \neq 0$  неравенство (4) выполняется с запасом.

Таблица 2

Параметры резонансных кулоновских систем

сис- тема	ядро	$l$	$a_B, \text{Фм}$	$\frac{r_N}{a_B}$	$E_R, \text{кэВ}$	$-a_B^{2l+1}/a_l^{(cs)}$	$a_B^{2l-1} \cdot r_l^{(cs)}$
$dt$	$^5\text{He}^*(3/2^+)$	0	24,0	0,15	$46,0 - i37,7$	$0,280 + i0,119$	$0,191 - i0,015$
$d^3\text{He}$	$^5\text{Li}^*(3/2^+)$	0	12,0	0,33	$194 - i127$	$0,200 + i0,025$	$0,256 - i0,014$
$^7\text{Li}p$	$^8\text{Be}^*(3^-)$	1	11,0	0,30	$386 - i5,4$	14,5	-6,83
$^7\text{Be}p$	$^8\text{B}^*(2^-)$	1	8,24	0,40	$637 - i19$	5,22	-2,30
$\alpha\alpha$	$^8\text{Be}(0^+)$	0	3,63	0,91	$92,1 - i1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,282

Примечание. В качестве  $r_N$  взята сумма зарядовых радиусов частиц системы <sup>1</sup>. В двух последних столбцах приведены безразмерные коэффициенты разложения (1) (в кулоновских единицах,  $a_B = 1$ ).

В таблице 2 приведены положения правых (в  $k$ -плоскости,  $k = (2E)^{1/2}$ ) полюсов  $S$ -матрицы  $E_R = E_r - i\Gamma/2$ , а также параметры разложения (1), которые полностью определяют аналитическую структуру амплитуды рассеяния вблизи упругого порога ( $k = 0$ ), в том числе две кулоновские серии полюсов, сгущающихся к порогу <sup>2</sup>. В трех последних примерах из табл.2 величины  $a_l^{(cs)}$  и  $r_l^{(cs)}$  – вещественные, вследствие чего полюса амплитуды рассеяния расположены симметрично относительно мнимой оси  $k$ -плоскости. В остальных случаях эта симметрия нарушается.

Можно показать, что радиус  $\tilde{r}_l^{(cs)}$  в момент возникновения  $l$ -уровня определяет локализацию системы:

$$w_{<}(R) = 1 - \frac{1 - H_l(R)}{1 - 3(l!)^2 a_B^{2l-1} \tilde{r}_l^{(cs)}}, \quad R > R_c, \quad (5)$$

где  $w_{<}(R)$  – вероятность найти систему на расстояниях  $r < R$ . Так, для  $dt$ -системы получаем:  $w_{<} (5 \text{Фм}) \approx 0,05$  и  $w_{<} (10 \text{Фм}) \approx 0,50$ , а для  $\alpha\alpha - w_{<} (4 \text{Фм}) \approx 0,75$ . С ростом отношения  $r_N/a_B$  кулоновская система "поджимается" к радиусу действия ядерных сил.

В заключение отметим, что ограничение (4) справедливо при любой форме сильного потенциала  $V_s(r)$  и произвольном значении отношения  $r_N/a_B$ . Было бы интересно найти его применения к состояниям с угловым моментом  $l$ , отличным от нуля.

Авторы благодарны Д.Попову за помощь в проведении численных расчетов.

1. F.Aisenberg-Selove, Nucl. Phys. A **490**, 1 (1988).
2. Б.М.Карнаков, В.Д.Мур, С.Г.Поздняков, В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **51**, 352 (1990); ЯФ **52**, 1540 (1990).
3. В.С.Попов и др., ЖЭТФ **80**, 1271 (1981).
4. T.-Y.Wu, and T Ohmura, Quantum Theory of Scattering. Prentice-Hall, N.Y., 1962.
5. E.Lambert, Helv. Phys. Acta **42**, 667 (1969).
6. Г.Брейт, Теория резонансных ядерных реакций, стр.163. М.: ИИЛ, 1961.