Письма в ЖЭТФ, том 56, вып.3, стр.180 - 183 10 августа 1992 г.

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ КВАНТОВОЙ $SL_q(2)$-ГРУППЫ СИММЕТРИИ

В.П.Акулов, В.Д.Гершун, А.И.Гуменчук

Харьковский физико-технический институт,

310108, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 7 июля 1992 г.

Предложен механизм спонтанного нарушения для q-деформированных групп. На примере нарушения $SL_q(2)$-группы построен феноменологический лагранжиан, описывающий взаимодействие голдстоуновских частиц с аномальной статистикой.

Открытие квантовых или q-деформированных групп [1-3], описывающих симметрию квантовых двумерных теоретико-полевых и статистических моделей наиболее адекватным способом, породило идею q-изации всех теоретико-групповых структур квантовой теории поля [4-6]. Первой попыткой в этом направлении была q-изация теории Янга–Миллса [4,6]. В настоящей статье исследуется вопрос о возможности спонтанного нарушения для квантовых групп. На примере нарушения квантовой группы $SL_q(2,\mathbb{R})$ строится феноменологический лагранжиан для голдстоуновских полей, обладающих аномальной статистикой.

Рассмотрим квантовую группу $SL_q(2,\mathbb{R})$ матриц вида $G=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с условием

$$\det_q G = ad - qbc = 1 \tag{1}$$

и элементами, удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &ab = qba, \quad cd = qdc, \qquad bc = cb, \\ &ac = qca, \quad bd = qdb, \quad ad - da = (q-q')bc \end{aligned} \tag{2}$$

Для нахождения экспоненциального отображения квантовой алгебры $sl_q(2)$ удобно перейти от генераторов H, X^+, X^-, удовлетворяющих коммутационным отношениям [7,8]

$$[H, X^\pm] = 2X^\pm, \quad [X^+, X^-] = \frac{\operatorname{sh}(H\ln q)}{\operatorname{sh}\ln q} \tag{3}$$

к генераторам $\sigma_\pm$, σ_3 [9,10], которые являются фундаментальным представлением как $sl_q(2)$, так и классической $sl(2)$-алгебры. Некоммутативность элементов группы (2) будет определять некоммутативность параметров алгебры.

Представим матрицу G в виде разложения Гаусса:

$$G = \begin{pmatrix} (1+qbc)d^{-1} & bd^{-1} \\ cd & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cd & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Каждую из этих матриц можно представить в виде экспоненты от одного из генераторов $\sigma_\pm$, σ_3:

$$G = e^{\varphi_-\sigma_+} e^{\varphi_+\sigma_-} e^{\varphi\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho + \varphi_- \varphi_+ \rho & \varphi_- \rho^{-1} \\ \varphi_+ \rho & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \rho = e^{\varphi}.$$

Непосредственным вычислением из условия (2) получаем коммутационные соотношения для параметров алгебры

$$\rho\varphi_\pm = q\varphi_\pm \rho \qquad \varphi_- \varphi_+ = q^2 \varphi_+ \varphi_- \ . \tag{6}$$

Определим левоинвариантные дифференциальные формы Картана для $SL_q(2)$ [11,12]:

$$\Omega = G^{-1} dG = \omega_+ \sigma_- + \omega_- \sigma_+ + \omega_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_- \\ \omega_+ & -\omega_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\omega_3 = \rho^{-1} d\rho + \rho^{-1} d\varphi_- \varphi_+ \rho, \tag{8}$$

$$\omega_+ = \rho d\varphi_+ \rho - \rho\varphi_+ d\varphi_- \varphi_+ \rho, \tag{9}$$

$$\omega_- = \rho^{-1} d\varphi_- \rho^{-1}. \tag{10}$$

Из требования выполнения уравнений Маурера–Картана можно получить коммутационные соотношения между параметрами ρ, $\varphi_\pm$ и их дифференциалами

$$\begin{gathered} \rho d\rho = d\rho\rho \qquad \varphi_+ d\rho = \frac{1}{q} d\rho\varphi_+ \\ \rho d\varphi_+ = q d\varphi_+ \rho \qquad \varphi_+ d\varphi_+ = d\varphi_+ \varphi_+ \\ \rho d\varphi_- = d\varphi_- \rho \qquad \varphi_+ d\varphi_- = \frac{1}{q^2} d\varphi_- \varphi_+, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \varphi_- d\varphi_+ = q^2 d\varphi_+ \varphi_- \qquad \varphi_- d\rho = \frac{1}{q} d\rho\varphi_- + \left(\frac{1}{q} - 1\right) \rho d\varphi_- \\ d\varphi_- d\rho = -d\rho d\varphi_- \qquad \omega_- \omega_+ = -\omega_+ \omega_- \\ d\varphi_+ d\rho = -\frac{1}{q} d\rho d\varphi_+ \qquad \omega_- \omega_3 = -\omega_3 \omega_- \\ d\varphi_- d\varphi_+ = -q^2 d\varphi_+ d\varphi_- \qquad \omega_+ \omega_3 = -\omega_3 \omega_+. \end{gathered} \tag{12}$$

Дифференциал d можно выразить в виде разложения по ω-формам:

$$d = \delta\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \delta\varphi_+ \frac{\partial}{\partial \varphi_+} + \delta\varphi_- \frac{\partial}{\partial \varphi_-} = \omega \nabla + \omega_- \nabla_+ + \omega_+ \nabla_- = \omega_i \nabla_i, \tag{13}$$

где ∇_i – ковариантные производные:

$$\nabla = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \tag{14}$$

$$\nabla_- = \frac{1}{q} \rho^{-2} \frac{\partial}{\partial \varphi_+} \tag{15}$$

$$\nabla_+ = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \varphi_-} - \frac{1}{q^2}\rho^3 \varphi_+ \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{q}\rho^2 \varphi_+^2 \frac{\partial}{\partial \varphi_+}. \tag{16}$$

Условие $d^2 = 0$ определяет алгебру ковариантных производных, которая совпадает с алгеброй $sl(2,_r R)$

$$[\nabla_+, \nabla_-] = \nabla, \quad [\nabla, \nabla_+] = 2\nabla_+, \quad [\nabla, \nabla_-] = 2\nabla_-, \tag{17}$$

и условия, что

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \varphi_+}\rho - q\rho\frac{\partial}{\partial \varphi_+} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \varphi_+} - q\frac{\partial}{\partial \varphi_+}\frac{\partial}{\partial \rho} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \rho}\varphi_+ - \frac{1}{q}\varphi_+\frac{\partial}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \varphi_-} - q\frac{\partial}{\partial \varphi_-}\frac{\partial}{\partial \rho} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \varphi_-}\rho - q\rho\frac{\partial}{\partial \varphi_-} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_-}\frac{\partial}{\partial \varphi_+} - q^4\frac{\partial}{\partial \varphi_+}\frac{\partial}{\partial \varphi_-} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \varphi_+}\varphi_+ - \varphi_+\frac{\partial}{\partial \varphi_+} = 1.
\end{gathered} \tag{18}$$

Выбирая в качестве стационарной подгруппы H подгруппу диагональных матриц, будем рассматривать параметры фактор-пространства $G/H - \varphi_-(x)$ и $\varphi_+(x)$ как голдстоуновские поля, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (6). Так как для $SL_q(2,R)$ параметр $|q| = 1$, то его можно интерпретировать как фазовый множитель, определяющий тип статистики для голдстоуновских полей φ_+ и φ_- : $q = e^{i\gamma}$.

Условия самосопряженности матричных элементов G приводят к следующему определению эрмитового сопряжения для операторов $\varphi_\pm, \rho$

$$\rho^+ = \rho \quad (\varphi_+)^+ = \rho^{-1}\varphi_+\rho \quad (\varphi_-)^+ = \rho\varphi_-\rho^{-1}.$$

Феноменологический лагранжиан для таких полей можно строить стандартным способом [13,14]:

$$L = \omega_+^\mu \omega_-^\mu + \omega_-^\mu \omega_+^\mu = \partial_\mu \varphi_+ \partial_\mu \varphi_- + \partial_\mu \varphi_- \partial_\mu \varphi_+ - q^2 \varphi_+^2 (\partial_\mu \varphi_-)^2 - q^{-2}(\partial_\mu \varphi_-)^2 \varphi_+^2, \tag{19}$$

где

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \varphi_\pm = \varphi_\pm(x), \quad \omega_\pm(d) = dx_\mu \omega_\pm^\mu$$

Полученный лагранжиан является эрмитовым относительно ранее определенной операции эрмитового сопряжения и имеет типичную голдстоуновскую структуру за исключением того обстоятельства, что поля $\varphi_\pm(x)$ и $\partial_\mu \varphi_\pm(x)$ являются операторами, удовлетворяющими q-коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered}
\varphi_-(y)\frac{\partial \varphi_+(x)}{\partial x^\mu} - q^2\frac{\partial \varphi_+(x)}{\partial x^\mu}\varphi_-(y) = 0 \\
\frac{\partial \varphi_-(x)}{\partial x^\mu}\varphi_+(y) - q^2\varphi_+(y)\frac{\partial \varphi_-(x)}{\partial x^\mu} = 0
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\frac{\partial\varphi_-(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi_+(y)}{\partial y^\nu} - q^2\frac{\partial\varphi_+(y)}{\partial y^\nu}\frac{\partial\varphi_-(x)}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\varphi_-(x)\varphi_+(y) - q^2\varphi_+(y)\varphi_-(x) = 0.$$

В следующей публикации после квантования с деформированной скобкой Пуассона, согласованной с q-деформированным законом умножения переменных (20), будут получены перестановочные соотношения для полей с аномальной статистикой в произвольной размерности пространства-времени.

В заключение авторы выражают благодарность Д.В.Волкову и В.Г.Дринфельду за интерес к работе.

---

1. В.Г.Дринфельд, ДАН СССР **282**, 1060 (1985).
2. Н.Ю.Решетихин, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, Алгебра и анализ **1**, 178 (1989).
3. M.Jimbo, Lett. Meth. Phys. **11**, 247 (1986).
4. I.Ya.Aref'eva, I.V.Volovich, Preprint-SMI-17-90, Moscow.
5. G.Mack and V.Schomerus, Preprint DESY-91-037.
6. A.P.Isaev and Z.Popovicz, Preprint ITP Uwr, Wrozlaw, 1991.
7. П.П.Кулиш, Н.Ю.Решетихин, Записки научных семинаров ЛОМИ, **101**, 101 (1981).
8. Е.К.Склянин, Функциональный анализ и его приложения **16**, 27 (1982).
9. S.P.Vokos, B.Zumino, and J.Wess, Z. Phys. C **48**, 65 (1990).
10. O.Ogievetsky, and J.Wess, Z.Phys. C. Particle and Fields. **50**, 123 (1990).
11. A.Shirrmacher, J. Wess, and B.Zumino, Ibid **49**, 317 (1991).
12. S.Woronowicz, Comm. Math. Phys. **111**, 613 (1987).
13. Д.В.Волков. Препринт ИТФ 69-75, Киев.
14. C.D.Callan, S.Coleman, J.Wess, and B.Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969).