

КРИТИЧЕСКИЙ ИНДЕКС ПРОВОДИМОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

A.E.Морозовский, A.A.Снарский

*Институт металлофизики АН Украины
252142, Киев, Украина*

*Киевский политехнический институт
252056, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 30 июля 1992 г.

Определена геометрическая структура проводящего кластера. На ее основании получено аналитическое выражение для критического индекса проводимости случайной сетки с экспоненциально широким спектром сопротивлений. Проведено сравнение с известными численными значениями и точными границами.

Задаче определения эффективной проводимости σ^e случайной сетки с экспоненциально широким спектром сопротивления посвящено большое число работ (см., например, ¹⁻⁹). Внимание к этой задаче связано, в том числе и с тем, что к ней сводится, в ряде случаев, вычисление прыжковой проводимости ¹⁰.

Простейшая постановка задачи по определению σ^e следующая: сопротивление i -той связи решетки равно $R_i = R_0 \exp(-\lambda x_i)$, где R_0 – константа, а x_i – случайная переменная с гладкой плотностью вероятности $D(x_i)$. Корреляции между значениями различных связей отсутствуют, распределение $D(x)$ одно и то же для всех связей. В дальнейшем для простоты положим $D(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$ и $D(x) = 0$ для всех остальных. В этом случае под экспоненциально большой неоднородностью понимается предел $\lambda \rightarrow \infty$.

Недавно Тыч и Гальперин ⁸ предложили следующее асимптотическое выражение для эффективной проводимости

$$\sigma^e \approx \frac{C}{R(x_c)a_0^{d-2}} \left(\frac{D(x_c)}{\lambda} \right)^y, \quad (1)$$

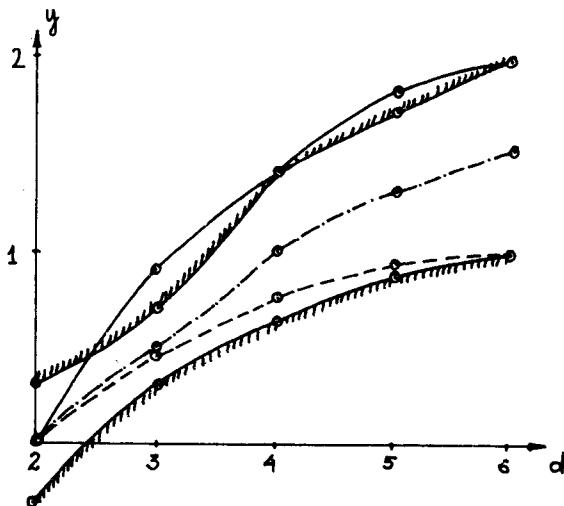
где C – константа, a_0 – постоянная решетки, значение x_c определяется через p_c порог протекания

$$\int_{x_c}^1 D(x) dx = p_c, \quad (2)$$

y – критический индекс, определению которого посвящены ^{8,9} и настоящая статья.

Аналитическое выражение для y полученное в ⁹ (см. (11) и рисунок) не согласуется с численными значениями и двусторонними границами полученными в ^{8,10}. В настоящем сообщении предлагается подход, позволяющий снять указанное противоречие.

Для определения критического индекса y предположим вначале, что при $x \rightarrow x_c$ мы находимся выше порога протекания. То есть, что если мы все сопротивления с $R \leq R(x_c)$ закрасили черным цветом, то получили бы стандартную картину типа Nodes-Links-Blobs (NLB) с определенной длиной мостика (набора единично соединенных связей), сопротивление которого и определяет в



Зависимость критического индекса y от размерности задачи d . Линии со штриховкой – верхняя и нижняя граница^{8,10}, сплошная линия – критический индекс Ле Дуссала⁹, пунктирная линия – $y_{WLIM} = (t+q)/(t-q)$, штрих-пунктирная линия – $\hat{y} = (t-q)/2$. Для численных значений критических индексов принято $\nu_2 = 4/3$, $t_2 = q_2 = 1, 29$; $\nu_3 = 0, 9$, $t_3 = 1, 7$, $q_3 = 0, 7$; $\nu_4 = 0, 7$, $t_4 = 2, 4$, $q_4 = 0, 35$; $\nu_5 = 0, 6$, $t_5 = 2, 7$, $q_5 = 0, 14$; $\nu_6 = 0, 5$, $t_6 = 3$, $q_6 = 0$, где нижний индекс обозначает размерность задачи. Для удобства зависимости y от d представлена непрерывной линией

случае большой неоднородности все сопротивление в корреляционном объеме. Среднее сопротивление мостика, с учетом вида $D(x)$ и $\lambda \gg 1$ равно

$$\langle R \rangle_1 = \int_{x_c}^1 R(x) P_1(x) dx \approx \frac{R(x_c)}{1 - x_c} \lambda^{-1}, \quad (3)$$

где перенормировка распределения $P_1(x) = D(x) / \int_{x_c}^1 D(x) dx$ связана с выполнением того условия, что самое большое сопротивление в мостике $R(x_c)$.

Сопротивление мостика, а следовательно и сопротивление всего корреляционного объема равно

$$R_1 = N_1 \langle R \rangle_1, \quad (4)$$

где N_1 – количество связей в мостике.

Предположим теперь, что среда при $x \rightarrow x_c$ находится ниже порога протекания. Это означает, что при закрашивании черным цветом сопротивлений с $R \leq R(x_c)$ мы получаем дуальную к предыдущему случаю картину – все сопротивление набирается на тонкой, длиной в одну связь (a_0) прослойке между хорошо проводящими (черными) кластерами. Среднее сопротивление (связи в прослойке параллельны друг другу) равно

$$\langle \frac{1}{R} \rangle_2 = \int_0^{x_c} \frac{P_2(x)}{R(x)} dx \approx \frac{\lambda^{-1}}{x_c R(x_c)}, \quad (5)$$

где перенормировка распределения $P_2(x) = D(x) / \int_0^{x_c} D(x) dx$ связана с тем, что проводящую цепь замыкает самое маленькое из встречающихся в прослойке сопротивлений.

Сопротивление прослойки, а следовательно и сопротивление всего корреляционного объема равно

$$R_2 = 1/N_2 \langle 1/R \rangle_2. \quad (6)$$

N_i степенным образом зависят от $\tau = (n(x_c) - n(x))/n(x_c)$ – близости к p_c , где

$$n(x) = \int_{x_c}^1 D(x) dx$$

$$N_i \sim |\tau|^{-\alpha_i}. \quad (7)$$

При x достаточно близком к x_c система находится в области размазки ⁶ $\tau < \Delta$, где Δ – область размазки ¹¹. В этом случае $R_1(\tau \approx \Delta) = R_2(\tau \approx \Delta)$, откуда

$$\Delta \approx [x_c(1 - x_c)]^{-\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \lambda^{-\frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}}. \quad (8)$$

Теперь для того, чтобы определить σ^e в области размазки учтем, что $\sigma^e = L^{d-2}/R_i$, где $L = a_0|\tau|^{-\nu}$ – характерный размер корреляционного объема, ν – критический индекс корреляционного объема. Подставляя $\tau \approx \Delta$ (8) в σ^e получаем

$$\sigma^e = \frac{1}{a_0^{d-2} R(x_c)} x_e^{-\frac{\alpha_1 + \nu(d-2)}{\alpha_1 + \alpha_2}} (1 - x_c)^{\frac{\alpha_2 + \nu(d-2)}{\alpha_1 + \alpha_2}} \lambda^\nu, \quad (9)$$

где критический индекс y равен

$$y = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + 2\nu(d-2)}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (10)$$

Значения α_i по разному определяются в разных моделях перколяционной структуры. Так, например, в NLB-модели индекс α_1 , определяющий количество единично соединенных связей (singly connected bounds) ^{12–15} равен единице. В дуальной к NLB-модели индекс α_2 определяет количество единично разъединенных связей (singly disconnecting bounds) и согласно ¹⁶ также равен единице. Таким образом согласно NLB-моделям $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и полученное выше выражение для критического индекса превращается в

$$y_{LD} = \nu(d-2) \quad (11)$$

что совпадает с результатом Ле Доуссала ⁹.

Согласно модели слабого звена (WLM) ^{17–20}

$$\alpha_1 = t - \nu(d-2), \quad \alpha_2 = q + \nu(d-2) \quad (12)$$

и, таким образом,

$$y_{WLM} = \frac{t-q}{t+q},$$

где t и q – критические индексы проводимости двухфазных систем ¹² (в двухфазных системах с $\sigma_2 \ll \sigma_1$ при $\tau > 0 \sigma^e \sim \tau^t$ и при $\tau < 0 \sigma^e \sim |\tau|^{-q}$).

Критический индекс y_{WLM} хорошо согласуется (в отличие от y_{LD} ⁹) со значениями, полученными на основании численного эксперимента в работе Тыча и Гальперина ⁹ и удовлетворяет двусторонним границам, установленным в ^{10,9}. Более подробный и сложный расчет, требующий построения WLM непосредственно в области размазки приводит к $\tilde{y} = (t-q)/2$.

Таким образом WLM, описывающая структуру двухфазной среды вблизи p_c позволяет выразить критический индекс y через хорошо известные критические индексы t и q . Такое распространение WLM на системы с экспоненциально широким спектром сопротивлений, позволяет применить ее к исследованию критического поведения $1/f$ шума и высших моментов распределения токов в

таких системах, аналогично тому как это было сделано в^{18,20} для двухфазных систем. Эти результаты будут опубликованы отдельно.

Мы благодарны Д.Бергману за присылку оттисков работ и Э.М.Баскину за многочисленные и плодотворные беседы по затронутой проблеме.

-
1. V.Ambegaokar, B.I.Halperin, and J.S.Langer, Phys. Rev. B **4**, 2612 (1971).
 2. B.I.Shklovskii and A.L.Efros, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **60**, 867 (1971) [Sov. Phys. JETP **33**, 4681 (1971).]
 3. D.Stauffer, Introduction to Percolation Theory (London: Taylor and Francis, 1985)
 4. V.Ambegaokar, S.Cochran, and J.Kurkijarvi, Phys. Rev. B **8**, 3682 (1973).
 5. M.Pollak and B.I.Halperin, Sol. St. Commun. **13**, 869 (1973).
 6. B.I.Shklovskii and A.L.Efros, Usp. Fiz. Nauk **117**, 401 (1975) [Sov. Phys. Usp. **18**, 845 (1975)].
 7. J.Kurkijarvi, Phys. Rev. B **9**, 770 (1974).
 8. S.Tyc and B.I.Halperin, Phys. Rev. B **39**, 877 (1989).
 9. P. le Doussal, Phys. Rev. B **39**, 881 (1989).
 10. E.Charlaix, E.Gudon, and S.Roux, In.: Transport in Porous Media 2 (Riedel, Dordrecht, 1987), p.31.
 11. B.I.Shklovskii and A.L.Efros, Electronic Properties of Doped Semiconductors (Berlin: Springer-Verlag, 1983).
 12. A.L.Efros and B.I.Shklovskii, Phys. Stat. Sol. B **76**, 475 (1976).
 13. A.S.Shal and B.I.Shklovskii, Fiz. Tekn. Poluprovodn. **8**, 1586 (1974) [Sov. Phys. Semicond., **8**, 1029 (1975)].
 14. A.Coniglio, Phys. Rev. Lett. **46**, 250 (1981).
 15. R.Pike and K.E.Stanley, J. Phys. A **14**, L169 (1981).
 16. A.Coniglio, J. Phys. A **15**, 3829 (1982).
 17. D.C.Wright, D.J.Bergman, and Y.Kantor, Phys. Rev. B **33**, 396 (1986).
 18. A.A.Snarskii, Zh. Eksp. Fiz. **91**, 1405 (1986) [Sov. Phys. JETP **64**, 828 (1986)].
 19. A.E.Morozovskii and A.A.Snarskii, Zh. Eksp. Fiz. **95**, 1844 (1989) [Sov. Phys. JETP **68**, 1066 (1989)].
 20. A.E.Morozovskii and A.A.Snarskii, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **52**, 871 (1990) [JETP Lett. **52**, 244 (1990)].
 21. A.E.Morozovskii, A.A.Snarskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **102**, 683 (1992).