

ЭВОЛЮЦИЯ НЕМОНОТОННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ КОРТЕВЕГА – де ВРИЗА

А.Л.Крылов*, В.В.Ходоровский*, Г.А.Эль

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН
142092, Троицк, Московская обл., Россия*

**Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН
123810, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 1992 г.

После переработки 12 августа 1992 г.

Получено общее решение задачи эволюции немонотонного крупномасштабного возмущения в дисперсионной гидродинамике Кортевега–де Вриза.

1. Задача об ударной волне в дисперсионной гидродинамике была впервые сформулирована Гуревичем и Питаевским (ГП) в ¹, где с помощью метода Уизема ² было найдено автомодельное решение задачи о распаде начального разрыва в гидродинамике Кортевега–де Вриза (КдВ). Построение решений более общего вида стало возможным благодаря обобщению классического метода годографа на многомерный (в пространстве зависимых переменных) случай ³ (см. также ⁴). В работах ⁵⁻⁷ были найдены решения задачи ГП для уравнения КдВ с начальными данными как в виде монотонного опрокидывающегося профиля, так и для локализованного возмущения. В последнем случае рассматривалась волна, движущаяся по невозмущенной среде. Решения как в монотонном, так и в локализованном случае характеризовались двумя произвольными функциями, задающими начальный профиль.

Настоящая статья посвящена построению решения задачи ГП для уравнения КдВ со слабой дисперсией

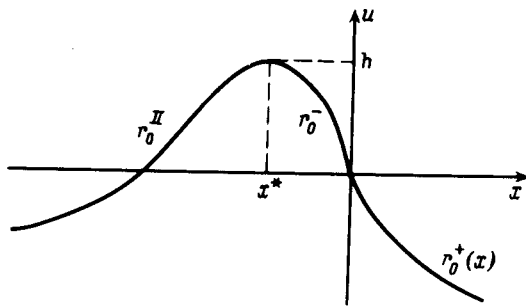
$$\partial_t u + u \partial_x u + \epsilon^2 \partial_{xxx}^3 u = 0, \quad \epsilon^2 \ll 1 \quad (1)$$

с начальными данными общего вида (рисунок)

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} \tau_0^+(x), & x \geq 0 \\ \tau_0^-(x), & x^* \leq x < 0 \\ \tau_0^H(x), & x \leq x^* \end{cases} \quad (2)$$

причем $\tau_0^+(0) = \tau_0^-(0) = 0$, $(\tau_0^+)'$, $(\tau_0^-)' \leq 0$, $(\tau_0^H)' \geq 0$, $\tau_0^H(-\infty) \geq \tau_0^+(+\infty)$, $\tau_0^-(x^*) = \tau_0^H(x^*) = h$, $u_0'(0) \rightarrow -\infty$. Отметим, что функция $u(0, x)$, вообще говоря, неаналитична в (единственной) точке опрокидывания $(0, 0)$ и в точке максимума (x^*, h) ; кроме того, $u_0(x)$ меняется достаточно медленно, то есть $u_0/(u_0') \gg 1$ всюду, кроме ϵ – окрестности точки опрокидывания.

Как известно ¹, опрокидывание профиля (2) в дисперсионной гидродинамике (1) приводит к образованию бездиссипативной ударной волны (БУВ) – квазистационарной осциллирующей области, заключенной в неизвестных заранее границах $x^+(t)$ – передний фронт и $x^-(t)$ – задний фронт. В случае локализованных начальных данных БУВ асимптотически ($t \rightarrow \infty$) превращается в солитонную волну – цепочку не взаимодействующих солитонов ⁷.



Начальное возмущение $u = u_0(x)$

Динамика БУВ описывается модуляционной системой Уизема, получаемой усреднением исходного уравнения по периоду стационарной бегущей волны. В случае КдВ модуляционная система имеет риманову форму

$$\partial_t r_i + V_i(r) \partial_x r_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где характеристические скорости могут быть заданы потенциальным представлением ⁴:

$$V_i(r) = U - [3\partial_i \ln(\lambda/\epsilon)]^{-1}. \quad (4)$$

Здесь

$$U = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 r_i, \quad \lambda = 2 \cdot 6^{1/2} \epsilon \int_{r_1}^{r_2} \left[\prod_{i=1}^3 (\tau - r_i) \right]^{-1/2} d\tau,$$

фазовая скорость и длина волны, $r_3 \geq r_2 \geq r_1$. Решение уравнений (3) сшивается на границах БУВ с гладким решением $r(x, t)$ уравнения Хопфа.

$$\partial_t r + r \partial_x r = 0 \quad (5)$$

с начальными данными $r(0, x) = u(0, x)$, так как в отсутствие осциллирующей дисперсионный член в уравнении КдВ (1) оказывается несущественным.

Граничные условия для системы (3), (4) (условия ГП) имеют вид ¹:

$$r_2(x^-, t) = r_1(x^-, t), \quad r_3(x^-, t) = r(x^-, t), \quad (6)$$

$$r_2(x^+, t) = r_3(x^+, t), \quad r_1(x^+, t) = r(x^+, t).$$

2. Решение системы (3) может быть найдено в виде

$$x - V_i(r)t = W_i(r), \quad r \equiv (r_1, r_2, r_3); \quad (7)$$

где

$$W_i = f - \partial_i f / \partial_i \ln(\lambda/\epsilon), \quad (8)$$

а функция $f(r)$ (скалярный потенциал) удовлетворяет системе Эйзенхарта ⁸ (детали вывода см. в ^{5,6})

$$\partial_{ij}^2 f = \frac{1}{2(r_i - r_j)} (\partial_i f - \partial_j f). \quad (9)$$

Система (10) была впервые получена для КдВ прямым вычислением в ⁹.

Как ясно из ⁷, немонотонность начального профиля (2) приводит к "двулистности" обобщенного преобразования годографа (7). Это означает, что решение поставленной задачи (3), (6) дается двумя системами (7)–(9) с двумя различными функциями $f_{I,II}$ (определенными в области $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq h$), сшивка которых происходит вдоль характеристической плоскости $r_3 = h$. Для этих функций имеем следующие граничные условия (см. ⁵⁻⁷)

$$f_I(r_1, 0, 0) = \frac{1}{2(-r_1)^{1/2}} \int_0^{-r_1} y^{-1/2} W_I^+(-y) dy, \quad (10)$$

$$f_I(0, 0, r_3) = \frac{1}{2r_3^{1/2}} \int_0^{r_3} y^{-1/2} W_I^-(y) dy,$$

$f_I(r_1, r_1, 0)$, $f_I(0, r_3, r_3)$ – ограничены.

$$f_{II}(0, 0, r_3) = \begin{cases} \frac{1}{2r_3^{1/2}} \int_0^{r_3} y^{-1/2} W_{II}^-(y) dy, & r_3 > 0, \\ \frac{1}{2(-r_3)^{1/2}} \int_0^{-r_3} y^{-1/2} W_{II}^-(-y) dy, & r_3 < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$f_I(r_1, r_2, h) = f_{II}(r_1, r_2, h) \quad (12)$$

Здесь $x = W_I^+(r)$, $x = W_I^-(r)$, $x = W_{II}^-(r)$, – функции, обратные к $r = r_0^+(x)$, $r = r_0^-(x)$ и $r = r_0^{II}(x)$, соответственно.

3. Решение $f_I(r)$ на первом "листе" совпадает с найденным в ⁶ решением задачи об опрокидывании монотонного неаналитического профиля и имеет вид

$$f_I(r) = \frac{1}{\pi(r_3 - r_2)^{1/2}} \int_{r_2}^{r_3} \frac{W_I(y)}{(y - r_1)^{1/2}} K(z) dy + \frac{1}{\pi(r_2 - r_1)^{1/2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{W_I(y)}{(r_3 - y)^{1/2}} K(z^{-1}) dy. \quad (13)$$

Здесь

$$W_I(y) = \begin{cases} W_I^+(y), & y \leq 0 \\ W_I^-(y), & y > 0; \end{cases} \quad z = \left[\frac{(r_2 - r_1)(r_3 - y)}{(r_3 - r_2)(y - r_1)} \right]^{1/2}, \quad (14)$$

$K(z)$ – полный эллиптический интеграл первого рода – функция Римана уравнения Эйлера–Пуассона ¹⁰.

Решение на втором листе, удовлетворяющее условиям (11), (12), имеет вид

$$f_{II}(r) = f_I(r) + \frac{1}{\pi(r_3 - r_1)^{1/2}} \int_{r_3}^h \frac{D(y)}{(y - r_2)^{1/2}} K(z_1) dy, \quad (15)$$

где

$$D(y) = W_I(y) - W_{II}(y), \quad D(h) = 0, \quad z_1 = \left[\frac{r_2 - r_1 y - r_3}{r_3 - r_1 y - r_2} \right]^{1/2}$$

Непрерывность решения (7), (8), (14), (15) в области склейки листов обеспечивается непрерывностью нормальной производной $\partial_3 f(r_1, r_2, h)$. При $r_1 \equiv 0$ решение (15), (16) совпадает с решением задачи о квазипростой волне ⁷.

4. Рассмотрим задачу об эволюции локализованного возмущения $r_0^+(+\infty) \rightarrow r_0$, $r_0^{II}(-\infty) \rightarrow r_0$, $r_0 \leq 0 - \text{const}$. Как известно ⁷ при $t \rightarrow \infty$ решение имеет вид солитонной волны, в которой $r_2 = r_3$ и солитоны движутся на однородном фоне r_0 .

Решение (7), (8), (15) принимает при $r_2 \rightarrow r_3$ вид

$$x \simeq \frac{2r_3 + r_0}{3}t + x_0(r_3), \quad (16)$$

$$t \simeq T(r_3) \ln(1 - m), \quad m = \frac{r_2 - r_0}{r_3 - r_0}. \quad (17)$$

Здесь

$$x_0(r_3) = \frac{1}{2\pi(r_3 - r_0)^{1/2}} \int_{r_3}^h \frac{D(y)}{(y - r_3)^{1/2}} \ln \left(\frac{y - r_3}{y - r_0} \right) dy + \frac{1}{2(r_3 - r_0)^{1/2}} \int_{r_0}^{r_3} \frac{W_I(y)}{(r_3 - y)^{1/2}} dy, \quad (18)$$

$$T(r_3) = \frac{3}{4\pi(r_3 - r_0)^{1/2}} \int_{r_3}^h \frac{D'(y)}{(y - r_3)^{1/2}} dy. \quad (19)$$

Видно, что $T(r_3) < 0$, что и требуется для $t \rightarrow +\infty$.

Формулы (17), (19) позволяют вычислить плотность солитонов в солитонной волне. Действительно,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi(r_3 - r_1)^{1/2}}{\epsilon 6^{1/2} K(m)} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_3} - \frac{2\pi(r_3 - r_1)}{\epsilon 6^{1/2} \ln(1 - m)}. \quad (20)$$

Сравнивая с (17), получаем для солитонной волны

$$\epsilon k \simeq \frac{1}{t} \left[- \frac{2\pi}{6^{1/2}} (r_3 - r_0)^{1/2} T(r_3) \right], \quad (21)$$

что согласуется с известной формулой Карпмана ¹¹, полученной с помощью метода обратной задачи рассеяния в квазиклассическом пределе. Отметим, что формула Карпмана не позволяет однозначно восстановить начальное возмущение по параметрам солитонной волны, так как функция $T(r_3)$ (19) содержит лишь ширину начального профиля $D(y)$. Однозначная связь между начальными данными и солитонной волной устанавливается с помощью (16)–(19).

Авторы благодарят А.В.Гуревича за внимание и интерес к работе.

1. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский, ЖЭТФ **65**, 590 (1973).
2. G.V.Whitham, Proc. Roy. Soc. A **283**, 238 (1965).

3. С.П.Царев, ДАН СССР **282**, 534 (1985).
4. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, УМН **44**, 29 (1989).
5. А.В.Гуревич, А.Л.Крылов, Г.А.Эль, Письма в ЖЭТФ **54**, 104 (1991).
6. А.В.Гуревич, А.Л.Крылов, Г.А.Эль, ЖЭТФ **101**, 1797 (1992).
7. А.В.Гуревич, А.Л.Крылов, Н.Г.Мазур, Г.А.Эль, ДАН СССР **323**, 876 (1992).
8. L.P.Eisenhart, *Annals of Math.* **120**, 262 (1918).
9. В.Р.Кудашев, С.Е.Шарапов, ТМФ **87**, 40 (1991).
10. Р.Курант, Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
11. V.I.Karpman, *Phys. Lett. A* **25**, 708 (1967).