Письма в ЖЭТФ, том 56, вып.9, стр.437 - 440 10 ноября 1992 г.

О ТУРБУЛЕНТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ

В.А.Белинский

Национальный Институт Ядерной Физики, Международный Центр Релятивистской Астрофизики

Рим, Италия

Поступила в редакцию 13 октября 1992 г.

Приведены соображения, указывающие на неограниченное развитие мелкомасштабной структуры в процессе космологического коллапса, что может существенно изменить наши представления о режиме приближения к особой точке.

Проблема особой точки по времени по-прежнему остается основной в космологиии (а возможно и вообще в теоретической физике). Со временем осознание неизбежности этого явления и его значимости только возрастают (см., [1] как пример одного из последних результатов в пользу сказанного). Вместе с тем вопрос о характере поведения гравитационного поля (в вакууме) в асимптотической близости к особенности в общем неоднородном случае до конца невыяснен. Исследования, основные результаты которых приведены в статьях [2], показывают чрезвычайную сложность хаотического режима приближения к особой точке, характер которого, тем не менее, удается полностью проследить для частного случая однородного пространства. Приводимые ниже соображения заставляют, однако, думать, что характер сингулярности в общем случае качественно сложнее того, который возникает в однородных моделях, и полное решение вопроса требует принципиально нового подхода.

Напомним, что решение, предложенное в [2] в качестве общего, описывается колебательным режимом того же рода, которым обладает однородная модель IX-типа. Основным элементом этого решения является понятие "казнеровской эпохи". На каждой такой эпохе метрика имеет вид

$$-ds^2 = -dt^2 + (t^{2p_1} l_\alpha l_\beta + t^{2p_2} m_\alpha m_\beta + t^{2p_3} n_\alpha n_\beta) dx^\alpha dx^\beta, \qquad (1)$$

где векторы $l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha$ и казнеровские показатели p_1, p_2, p_3 зависят только от трех пространственных координат. Эволюция решения во времени (при $t \to 0$) складывается из бесконечного чередования этих эпох с теми же, что и в модели IX-типа, законами смен показателей p_1, p_2, p_3 и направлений казнеровских осей $l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha$. Следующий факт имеет принципиальное значение: для построения решения такого рода необходимо, чтобы все трехмерные функции, содержащиеся в метрике (1), имели общую и единственную характерную длину, на которой они существенно меняются. Это дает возможность приближенно заменить в уравнениях Эйнштейна все производные от компонент метрики по пространственным переменным простыми произведениями этих компонент на характерное волновое число. Таким образом мы приходим к обыкновенным уравнениям по времени того же вида, что и в однородной модели IX-типа. В этом и состоит причина совпадения картины колебаний в однородной модели и в обобщенном решении, описанном в [2].

Из сказанного следует, что как модель IX-типа, так и ее обобщение, содержат колебательный режим только с одним пространственным масштабом,

величина которого произвольна и который не выделен среди всех остальных какими либо физическими условиями. Однако известно, что в нелинейных системах с бесконечным числом степеней свободы такой режим будет неустойчивым относительно частичного распада на колебания более мелких масштабов. В общем случае среди малых возмущений с произвольным спектром всегда найдутся такие, амплитуды которых будут расти, питаясь за счет энергии основного процесса. В результате возникает сложная картина многомасштабных движений с определенным распределением энергии и ее обменом между колебаниями различных масштабов. Это не происходит лишь в тех случаях, когда развитие мелкомасштабных колебаний невозможно по физическим условиям задачи. Для этого должна существовать какая-либо естественная физическая длина, определяющая тот минимальный масштаб, на котором энергия выводится из системы динамических степеней свободы (как это случается, например, в достаточно вязкой жидкости). Однако для такой системы, как гравитационное поле в вакууме, никакого внутреннего физического масштаба нет, в связи с чем нет и запрета на развитие колебаний сколь угодно малых масштабов.

Интересно, что этот вывод, сделанный из общих соображений, можно подтвердить также и прямым количественным анализом космологической эволюции и опять же с помощью представления о чередовании казнеровских эпох и бесконечном процессе преобразования казнеровских показателей. Можно показать, что пространственные градиенты показателей с приближением к особенности быстро и неограниченно возрастают, а вместе с ними также растут и градиенты всех остальных компонент метрики в силу их связи с показателями посредством уравнений поля. Впервые такое наблюдение было сделано Кирилловым и Кочневым [3], которые применили его результаты к исследованию совсем другой ситуации. Независимо это же явление было обнаружено пять лет спустя студентом-дипломником Римского университета Монтани [4], который назвал его фрагментацией (образование ячеек по терминологии Кириллова–Кочнева). Действительно, если не следить за соответствием между казнеровскими показателями и казнеровскими осями (что сейчас несущественно), а только за эволюцией трех численных величин, которые в том или ином порядке дают тройку показателей на каждой эпохе, то указанный эффект легко обнаружить, рассмотрев эволюцию параметра u, через который выражаются показатели Казнера (см. [2]):

$$p_1 = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \tag{2}$$

При изменении u в пределах от 1 до ∞ численные величины показателей пробегают все свои возможные значения в пределах

$$-\frac{1}{3} \le p_1 \le 0, \quad 0 \le p_2 \le \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \le p_3 \le 1. \tag{3}$$

Значения u меньшие единицы не дают ничего нового, так как величины (2) инвариантны (с точностью до не интересующей нас перестановки) относительно преобразования $u \to 1/u$. Анализ уравнений (см. [2]) показывает, что эволюция параметра u выражается бесконечной последовательностью:

$$u_1, u_1 - 1, \ldots, x_1 \to \frac{1}{x_1} \equiv u_2, u_2 - 1, \ldots, x_2 \to \frac{1}{x_2} \equiv u_3, u_3 - 1, \ldots. \tag{4}$$

Эта запись означает, что если на начальной эпохе значение u есть некоторое число u_1 большее единицы, то значение параметра u на следующих эпохах каждый раз становится на единицу меньше. Так продолжается до тех пор, пока параметр не станет некоторым числом x_1 меньшим единицы, но это последнее значение эквивалентно значению $1/x_1$ в силу уже отмеченной инвариантности, и дальнейшая эволюция в точности повторяет предыдущую, но с новым начальным значением параметра $u_2 = 1/x_1$, и так далее. В однородных моделях эта эволюция едина для всего пространства, то есть казнеровские показатели не зависят от пространственных координат. В общем случае начальное значение параметра u различно в разных точках, и это обстоятельство вместе с законом (4) приводит в процессе эволюции к особенности к неограниченному росту пространственных производных метрики независимо от того насколько близким к однородному было взято начальное распределение параметра u [3,4]. Рассмотрим, например, случай, когда функция $u_1(x, y, z)$ задана и непрерывна во всем пространстве и принимает значения в пределах от 1 до ∞ (последнее значение пусть достигается на пространственной бесконечности). Это значит, что на начальной эпохе все трехмерное пространство представляет собой одну естественную ячейку, в которой область изменения показателей покрывает интервалы (3) полностью и только один раз (пусть это будет определением ячейки). Уже на следующей эпохе, в согласии с (4), появляется пространственная область, где параметр u меняется между нулем и единицей, что эквивалентно (после замены $u \to 1/u$) изменению параметра между 1 и ∞. За пределами этой области во всей оставшейся части пространства параметр u по-прежнему будет меняться между 1 и ∞. Таким образом, мы имеем уже две ячейки вместо одной на предыдущей эпохе. В процессе перехода к третьей эпохе тот же механизм приводит к делению каждой из этих двух ячеек на две новые и т.д. В результате бесконечной эволюции параметра (4) число ячеек стремится к бесконечности, а размеры ячеек к нулю. Поскольку в каждой ячейке показатели обязаны пробегать все свои возможные значения, это означает, что их пространственные градиенты стремятся к бесконечности. Описанный процесс и показывает (в иной формулировке) стремление гравитационного поля к неограниченному самовозбуждению все более мелкомасштабных колебаний с приближением к космологической особенности.

Сама по себе эволюция единичного возбуждения со сколь угодно большим волновым числом не создает проблем для подхода, использованного в [2]. Описание основного элемента колебательного режима – смена казнеровских эпох - остается в силе для любой характерной длины. Проблема состоит в том, что этот метод не в состоянии учесть последствия взаимодействия большого числа возбуждений с широким спектром возможных значений волновых чисел. В силу нелинейности теории такое взаимодействие будет определяющим, и процесс нельзя представлять себе как суперпозицию колебаний с различными характерными длинами, каждое из которых описывается механизмом, исследованным в [2].

В связи со сказанным большое значение приобретает вопрос о возможности существования в такой системе как коллапсирующее гравитационное поле явлений самоорганизации и так называемого возврата, когда взаимодействие между модами возвращает систему к более простому движению (близкому к одномасштабному, например). Кроме того, необходимо понимать, что идея о неограниченном (со стороны больших волновых чисел) самовозбуждении мел-

комасштабных осцилляций следует все же из общих соображений, поскольку ее подтверждение на основе наблюдения Кириллова–Кочнева–Монтани имеет ограниченный смысл (само это наблюдение основано на понятии чередования казнеровских эпох, теряющего применимость после возникновения достаточно развитого многомасштабного движения). Для выяснения этих вопросов необходимо представлять себе характер миграции энергии по спектру. К счастью, в этом пункте положение дел облегчается тем, что коллапсирующее гравитационное поле обладает специфическим эффектом непрерывной накачки энергии в систему осциллирующих степеней свободы, причем сама скорость этой накачки неограниченно растет с приближением к сингулярности. Чтобы убедиться в этом, необходимо в уравнениях Эйнштейна в синхронной системе выделить детерминант метрики в качестве общего множителя в матрице метрического тензора, а оставшиеся компоненты (матрицу с единичным детерминантом) отнести к колебательным степеням свободы. Тогда мы обнаружим, что с приближением к особенности уравнения описывают эволюцию осциллирующих компонент под влиянием непрерывно растущего притока энергии извне (этот рост является следствием теоремы Ландау–Райчаудхури о монотонном стремлении детерминанта к нулю). С физической точки зрения это явление того же рода, что и переход потенциальной энергии системы коллапсирующих частиц в кинетическую энергию их относительного движения. Поскольку известно, что ничего кроме осцилляций в рассматриваемом случае нет, и отсутствует какой-либо выделенный масштаб, то наличие такого притока энергии в первом приближении решает вопрос о течении энергии по спектру: доминировать в этом течении должна непрерывная перекачка энергии в сторону бесконечно малых масштабов. При таких условиях явления возврата маловероятны, и можно думать, что именно непрерывное возбуждение все новых мелкомасштабных мод будет определять поведение системы. В результате асимптотическое состояние поля вблизи сингулярности будет представлять собой то, что можно назвать неограниченно развивающейся гравитационной турбулентностью. Описание такого состояния уже не может быть дано на основе классического понятия общего решения дифференциальных уравнений. Вместо этого мы должны перейти к определению только статистических характеристик в терминах теории случайных полей, а также к какой-либо форме феноменологического описания.

---

1. A.Vilenkin, Phys. Rev. **D 46**, 2355 (1992).
2. V.A.Belinsky, I.M.Khalatnikov, and E.M.Lifshitz, Adv. in Phys. **19**, 525 (1970); Ibid **31**, 639 (1982).
3. А.А.Кириллов, А.А.Кочнев, Письма в ЖЭТФ **46**, 345 (1987).
4. G.Montani "Tesi di Laurea", Universita di Roma, Facolta di Fisica (1992).