Письма в ЖЭТФ, том 56, вып.9, стр.455 - 460 10 ноября 1992 г.

САМОФОКУСИРОВКА И ДЕФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ ТЕПЛОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

М.А.Федоров[1)]

Всероссийский научно-исследовательский институт "Альтаир"

111024, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 августа

После переработки 8 октября 1992 г.

Рассматривается самовоздействие электромагнитных пучков Лагерра нулевого и первого порядка, распространяющихся в слабопоглощающей среде. В первом порядке теории возмущений по нелинейности рассчитана осевая интенсивность излучения при стационарном и нестационарном режимах распространения и для различных условий фокусировки. Предложено обобщение полученных результатов на случай сильной нелинейности.

1. *Введение.* Явления самовоздействия волновых пучков электромагнитного излучения оптического и СВЧ диапазонов могут качественно различаться в зависимости от начального амплитудно-фазового распределения поля пучка. Например, при распространении в дефокусирующей среде пучок с монотонным спаданием интенсивности от оси к периферии дефокусируется, тогда как при наличии областей с "провалом" интенсивности он может частично самофокусироваться [1]. Эти особенности распространения электромагнитных пучков в нелинейных средах представляют как общефизический так и прикладной интерес.

В то же время работы, посвященные самовоздействию электромагнитных пучков, вследствие математических трудностей решения трехмерной нелинейной краевой задачи, основаны на излишне упрощенных моделях либо применяют численное моделирование, не позволяющее продвинуться далее интерполяционных зависимостей характеристик пучка от отдельных параметров задачи. Попытки рассмотрения задачи в рамках волновой теории ограничиваются применением теории возмущений непосредственно к волновому уравнению и привели к успеху только для нескольких частных задач для гауссовского пучка [2-4].

Поэтому может представить интерес предложенная методика применения теории возмущений по нелинейности, которая позволила бы рассмотреть в едином подходе наиболее характерные проявления эффектов самовоздействия волновых пучков и дать возможность их количественной оценки. В настоящей статье сообщаются основные результаты выполнения этой программы на примере пучков Лагерра нулевого и первого порядка. Эти пучки имеют начальное распределение интенсивности в виде гауссовского распределения $\exp(-r^2)$ и распределения Гаусса с провалом интенсивности на оси $r^4\exp(-r^2)$ и начальное фазовое распределение, соответствующее фокусировке на определенную дальность.

2. *Общие соотношения.* Электромагнитные пучки в нелинейной среде описываются нелинейным параболическим уравнением для комплексной амплитуды электромагнитного поля

[1)] M.A.Fyodorov

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z}+\Delta_\perp A+(2k^2n_1/n_0)A=0, \tag{1}$$

в котором $n_1=n-n_0$ – отклонение показателя преломления среды от невозмущенного значения n_0, $k=2\pi n_0/\lambda$ – волновой вектор волны в невозмущенной среде, z – координата вдоль направления распространения волнового пучка. После введения безразмерных переменных (в дальнейшем штрихи опущены)

$$x'=x/r_0,\quad y'=y/r_0,\quad z'=z/kr_0^2,\quad W=A/A_0,\quad \alpha'=\alpha kr_0^2,$$

где r_0 – характерный поперечный размер пучка, $\alpha=4\pi\kappa/\lambda$ – показатель поглощения излучения в среде, κ – мнимая часть показателя преломления среды, A_0 – характерное начальное (при $z=0$) значение комплексной амплитуды электромагнитного поля, уравнение (1) принимает вид

$$2i\frac{\partial W}{\partial z}+\Delta_\perp W+H(W)W=0, \tag{2}$$

в котором $H(W)=2(kr_0)^2n_1(W)/n_0$. Интенсивность излучения $I(x,y,z)$ выражается через безразмерную функцию $W(x,y,z)$ следующим образом

$$I(x,y,z)=(P_0/\pi r_0^2)|W|^2\exp(-\alpha z),$$

где P_0 – полная мощность пучка, а функция W нормирована соотношением

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty}|W(x,y,0)|^2dxdy=\pi.$$

С целью построения теории возмущений, обеспечивающей нахождение решений уравнения (2) для пучков с произвольными начальными амплитудно-фазовыми распределениями в виде ряда по нелинейности, преобразуем уравнение (2) в интегральное, проведя преобразование Фурье по поперечным координатам $(x,y)\to(\rho,\eta)$ и выполнив интегрирование по z. В результате приходим к следующему интегральному уравнению для фурье-образа $W(\rho,\eta,z)$ функции $W(x,y,z)$

$$W(\rho,\eta,z)=W_0(\rho,\eta,0)\left\{-\frac{i}{2}(\rho^2+\eta^2)z+i\int_0^z dz_1\frac{H(\rho,\eta,z_1,W)}{W(\rho,\eta,z_1)}\right\}, \tag{3}$$

в котором $H(\rho,\eta,z,W)$ является фурье-образом выражения $H(W)W/2$, а функция $W_0(\rho,\eta,0)$ – фурье-образом начального амплитудно-фазового распределения поля пучка. Далее удобно применить метод последовательных приближений Пикара, в котором в качестве функции нулевого приближения выбрать решение уравнения (3) для волнового пучка, распространяющегося в невозмущенной среде

$$W_{lin}(\rho,\eta,z)=W_0(\rho,\eta,0)\exp(-\frac{i}{2}(\rho^2+\eta^2)z).$$

Существенно, что в функции нулевого приближения учтены граничные и начальные условия задачи, что обеспечивает универсальность предлагаемой методики построения решений уравнения (3) для пучков с различными начальными амплитудно-фазовыми распределениями. Первое приближение $W_1(x,y,z)$

получается при подстановке $W_{lin}(x,y,z)$ в правую часть (3), второе – при подстановке $W_1(x,y,z)$ и так далее.

Для первого приближения $W_1(x,y,z)$ получаем выражение

$$W_1(x,y,z) = W_{lin}(x,y,z) +$$

$$+\frac{(kr_0)^2}{2\pi n_0}\int\limits_0^z \frac{dz_1}{z-z_1}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dy_1 \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2i(z-z_1)}\right) n_1 W_{lin},$$

которое по форме совпадает с первым приближением метода плавных возмущений, а по существу является его обобщением для пучков, распространяющихся в нелинейной среде. Используя $W_1(x,y,z)$, находим следующее общее соотношение для относительной интенсивности пучка с произвольным начальным амплитудно-фазовым распределением в первом порядке по теории возмущений

$$I_{rel} = I(x,y,z)/I_{lin}(x,y,z) = 1 - N, \tag{4}$$

где

$$N = -\frac{(kr_0)^2}{2\pi n_0}\mathrm{Re}\left\{W_{lin}^{-1}\int\limits_0^z \frac{dz_1}{z-z_1}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dy_1 \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2i(z-z_1)}\right) n_1(x_1,y_1,z_1,W_{lin}) W_{lin}(x_1,y_1,z_1)\right\}.$$

Применим полученное соотношение для расчета интенсивности пучков Лагерра в среде, нелинейность которой обусловлена ее тепловым нагревом за счет энергии электромагнитного поля.

3. *Пучок L_0 – гауссовский пучок.* Ограничимся случаем длинного импульса излучения, для которого выполняется условие $t \gg r_0/c_s F$, где c_s – скорость звука в среде, $F = kr_0^2/z_F$ – число Френеля, z_F – фокусное расстояние. Будем считать, что основным механизмом теплоотвода из области локализации электромагнитного поля является вынос нагретой среды из канала распространения (со скоростью $v_\perp$ вдоль оси x). Поэтому осуществляются два режима распространения пучка: нестационарный ($t \ll t_1 = r_0/v_\perp F$), при котором скорость теплоотвода много меньше скорости нагрева, и стационарный ($t \gg t_1$), при котором скорости нагрева и выноса тепла сравниваются. В нестационарном режиме изменение показателя преломления среды определяется выражением

$$n_1 = -\frac{(n_0-1)(\gamma-1)\alpha I_{lin} t}{\gamma p_0},$$

а в стационарном – выражением

$$n_1 = -\frac{(n_0-1)(\gamma-1)r_0}{\gamma p_0 v_\perp}\int\limits_{-\infty}^{x} I_{lin}(x_1,y,z)dx_1,$$

где p_0 и γ – давление и показатель адиабаты среды.

Относительная интенсивность гауссовского пучка в нестационарном режиме, рассчитанная на основе (4) для слабопоглощающей среды ($\tau = \alpha z \ll 1$), описывается следующим выражением

$$I_{rel}(z) = 1 - \frac{t}{2\sqrt{\pi}t_{cr}z^2} \ln \frac{(1 - zF)^2 + 9z^2}{(1 - zF)^2 + z^2}, \tag{5}$$

в котором введен параметр нелинейности (в размерных единицах)

$$\frac{1}{t_{cr}} = \frac{(n_0 - 1)(\gamma - 1)\alpha P_0 z^2}{2\sqrt{\pi} n_0 \gamma p_0 r_0^4}.$$

В предельных случаях коллимированного ($F = 0$) и сфокусированного ($z = 1/F$) пучков формула (5) дает результаты [2,3]

$$I_{rel}(z) = 1 - 4t/\sqrt{\pi}t_{cr} \quad \text{при} \quad z \ll 1,$$

$$I_{rel}(z_F) = 1 - tF^2 \ln 3/\sqrt{\pi}t_{cr}.$$

Относительная интенсивность гауссовского пучка в стационарном режиме, рассчитанная на основе (4), для коллимированного пучка дает известный результат [4]

$$I_{rel}(z) = 1 - N_0 \Phi(\tau) \quad \text{при} \quad z \ll 1,$$

где $N_0 = r_0/v_\perp t_{cr}$, $\Phi(\tau) = 2(\tau - 1 + \exp(-\tau))/\tau^2$, а для сфокусированного пучка в точке фокуса получаем

$$I_{rel}(z_F) = 1 - N_0 G_0(F, \tau), \tag{6}$$

где

$$G_0(F, \tau) = \frac{\pi F^2}{3\sqrt{1 + 3F^2}} \left(1 - \frac{6F}{\pi(1 + 3F^2)} \ln \frac{1 + 3F^2}{eF}\right) \exp\left(-\frac{\tau F}{0,6 + F}\right)$$

в приближении, учитывающем основные члены разложения по параметру $2F/(1 + 3F^2) \le 1/\sqrt{3}$. Этот результат, полученный в рамках волновой теории, увеличивает примерно в три раза, по сравнению с расчетом, основанном на геометрической оптике [6], оценку критической мощности тепловой дефокусировки.

4. *Пучок L_1 - пучок Лагерра первого порядка.* Пучок L_1 описывается в невозмущенной среде следующим решением уравнения (2)

$$W_{lin} = \frac{i\sqrt{2}z}{(1 + iz(1 + iF))^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)(1 + iF)}{2(1 + iz(1 + iF))}\right) L_1 \left(\frac{i(x^2 + y^2)}{2z(1 + iz(1 + iF))}\right),$$

где L_1 - полином Лагерра первого порядка: $L_1(x) = 1 - x$. Самовоздействие пучка L_1 качественно отличается от самовоздействия гауссовского пучка. В нестационарном режиме коллимированный пучок на расстояниях $z \ll 1$ фокусируется

$$I_{rel}(z) = 1 + \frac{376}{15} \frac{4tz^2}{\sqrt{\pi}t_{cr}}, \tag{7}$$

а сфокусированный - в точке фокуса дефокусируется

$$I_{rel}(z_F) = 1 - \frac{tF^2 \ln 3}{\sqrt{\pi} t_{cr}} q_{nst}, \tag{8}$$

где $q_{nst} = 15/16 - 1/108 \ln 3 \approx 0,93$. В стационарном режиме распространения пучка явления аналогичны: для коллимированного пучка на расстояниях $z \ll 1$ получаем подфокусировку

$$I_{rel}(z) = 1 + (5/24) N_0, \tag{9}$$

а для сфокусированного пучка – ослабленную дефокусировку

$$I_{rel}(z_F) = 1 - N_0 G_1(F, \tau), \tag{10}$$

где при условии $F \gg 1$

$$G_1(F,\tau) = \frac{\pi F}{3\sqrt{3}} \exp(-\tau) q_{st}, \quad q_{st} = \frac{35}{48}\left(1 + \frac{19}{21}\left(1 - \frac{9\sqrt{3}}{5\pi}\right)\right) \approx 0,73.$$

При выводе формул (7)–(9) использовано условие $\tau \ll 1$.

5. *Обобщенные формулы.* Для каждого из рассмотренных типов пучков полученные выше формулы для интенсивности могут быть записаны в виде единых, объединяющих нестационарный и стационарный режимы, формул, которые в предельных случаях малых $(t \ll r_0/v_\perp F)$ и больших $(t \gg r_0/v_\perp F)$ времен переходят в соответствующий предельный случай. Кроме того, представляет интерес обобщение полученных результатов для дефокусирующих пучков в область сильной нелинейности, так как при увеличении параметра нелинейности, например, за счет повышения мощности пучка, интенсивность в его фокальной плоскости возрастает только до некоторого максимального значения, уменьшаясь при дальнейшем увеличении мощности. В работах [5–7] на основе анализа результатов численных экспериментов предложены аппроксимационные формулы для зависимости осевой интенсивности пучка от его мощности. Однако в области слабой нелинейности они переходят в степенную зависимость P_0^α, где $\alpha \neq 1$, что противоречит физическому смыслу и результатам расчета по теории возмущений. Обобщение, предлагаемое в настоящей статье, заключается в замене выражения $1 - N$ в (4) на $\exp(-N)$. Такое обобщение оставляет справедливыми результаты в первом порядке теории возмущений по нелинейности и качественно правильно описывает поведение интенсивности дефокусирующего пучка при большой нелинейности, давая возможность оценивать критические параметры пучка.

Приведем в качестве примера такую обобщенную формулу для сфокусированных гауссовского и L_1 пучков в предположении $F \gg 1$, $\tau \ll 1$.

$$I_{rel}(z_F) = \exp\left(-\frac{q_{nst} t F^2 \ln 3}{\sqrt{\pi} t_{cr}}\left(1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{3/2} \frac{q_{nst} \ln 3}{q_{st}} \frac{t v_\perp F}{r_0}\right)^{-1}\right), \tag{11}$$

где $q_{nst} = q_{st} = 1$ для пучка L_0 и $q_{nst} = 0,93$; $q_{st} = 0,73$ для пучка L_1. Из (11), в частности, видно как переходом в нестационарный режим устраняется "фиктивная" особенность по $v_\perp$ в формулах для стационарного режима распространения.

1. Г.А.Аскарьян, В.Б.Студенов, Письма в ЖЭТФ **10**, 113 (1969).
2. A.H.Aitken, J.N.Hayes, and P.B.Ulrich, Appl. Opt. **12**, 193 (1973).
3. Laser Beam Propagation in the Atmosphere. Ed.: J.W.Strohbehn N.Y. 1978.
4. F.G.Gebhardt and D.C.Smith, IEEE J.of QE **7**, 63 (1971).
5. E.H.Takken and D.M.Cordray, Appl. Opt. **13**, 2753 (1974).
6. F.G.Gebhardt, Appl. Opt. **15**, 1479 (1976).
7. H.Breaux, W.Evers et al., Appl. Opt. **18**, 2638 (1979).