Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.2, стр.87 - 90 ©1993 г. 25 июля

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

К.В.Чукбар

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 1993 г.

Выдвинута гипотеза, что относительная диффузия двух частиц в турбулентном поле скоростей с широким спектром (конкретно – колмогоровским) описывается не диффузионным, а интегральным уравнением. В этом случае вероятность быстрого расхождения частиц на большое расстояние мала всего лишь степенным образом.

Цель данной работы – предложить новый модельный метод описания турбулентной диффузии, то есть процесса расплывания облака пассивной примеси в среде с интенсивными хаотическими пульсациями скорости, возбужденными в широком спектральном интервале. Существование этого "инерционного интервала" $l_{min} < l < l_{max}$ сказывается уже на самом способе описания явления [1]. В отличие от обычной диффузии здесь крайне неудобно следить за уходом одной частицы от своего начального местоположения, поскольку до тех пор, пока расстояние, пройденное ею, находится внутри инерционного интервала, доминирует регулярный снос наиболее крупномасштабной (l_{max}) пульсацией скорости, а остальные составляющие спектра накладывают лишь небольшой "дребезг" на траекторию движения пробной частицы. По этой причине и в теоретических, и в экспериментальных работах обычно исследуют процесс относительной диффузии – расхождения двух первоначально близких частиц, – вычитая тем самым указанный паразитный эффект. Такое двухчастичное описание турбулентного перемешивания удобно еще и потому, что именно различие в поведении соседних частиц определяет форму облака пассивной примеси [2,3] и его фрактальные характеристики [3,4]. Турбулентность при этом обычно полагается однородной и изотропной (надо признать, в теоретических работах чаще, чем в экспериментальных).

Первый результат в этом направлении (и вообще первый количественный результат в области турбулентности) был получен в 1926 г. Ричардсоном [5], который на основе обработки экспериментальных данных сделал вывод о том, что скорость изменения среднего квадрата расстояния между частицами подчиняется "закону 4/3":

$$d < l^2 > /dt \propto (< l^2 >^{1/2})^{4/3} \tag{1}$$

(угловые скобки означают усреднение по многократно повторяющимся экспериментам). Нетрудно видеть, что он хорошо коррелирует с законом Колмогорова–Обухова, согласно которому в инерционном интервале пульсации скорости имеют спектр

$$v_l \propto l^{1/3},$$

и, следовательно, (1) соответствует доминированию в процессе "растаскивания" частиц пульсаций того же масштаба, что и текущее расстояние между ними:

$$d < l > /dt = v_l \propto < l >^{1/3}, \qquad < l > \propto t^{3/2}. \tag{2}$$

Таким образом, эмпирический закон Ричардсона имеет хорошее теоретическое обоснование [1] и, как правило, рассматривается в качестве научно установленного факта.

Сам Ричардсон, однако, не ограничился определением важных средних характеристик турбулентного переноса, а перешел к изучению его статистических свойств, для чего ввел в рассмотрение некоторый аналог двухчастичной функции распределения – плотность вероятности того, что две близкие при $t = 0$ частицы в момент t находятся на концах вектора $\mathbf{l}$: $T(\mathbf{l}, t)$ (то есть по определению $\int T d^3\mathbf{l} \equiv 1$), для которой постулировал следующее " кинетическое уравнение" [5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} l^{4/3} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{l}} \tag{3}$$

(начиная с этого места, все формулы записываются в безразмерном виде). Выбор диффузионного уравнения, по-видимому, связан с простотой нахождения его решения, необходимостью обеспечивать расплывание T при эволюции (то есть потерю информации в процессе турбулентного перемешивания), а также его привычностью. Функциональная зависимость коэффициента диффузии в (3) в этом случае определяется необходимостью удовлетворять закону 4/3. (Строго говоря, сделанный в (3) выбор коэффициента диффузии, равно как и подобные операции ниже, обеспечивает закон 4/3 не только для $< l^2 >$, но и аналогичное поведение всех существующих моментов $< l^\alpha >$. Это, тем не менее, не является сильным ограничением, поскольку автомодельный характер T в данной задаче есть всего лишь другая сторона "потери информации"). Ричардсон полагал, что он должен быть функцией только l, но ни в коем случае не t. В 1952 г. Бэтчелор, напротив, посчитал, что это должна быть функция только t и, следовательно, иметь вид $< l >^{4/3} \propto t^2$ [2]. В 1984 г. Хентшель и Прокаччиа предложили комбинированный вариант – степенная функция и t, и l с некоторой свободой в выборе показателей, то есть лишним подгоночным под эксперимент параметром [3]. Надо сказать, что аргументы сторон в конструктивной части в отличие от части критической страдают эвристичностью и абсолютно нестроги (Бэтчелор признавал это в явном виде [2]).

В настоящей работе хотелось бы обратить внимание на то, что нет никаких серьезных причин ограничивать кинетическое описание турбулентной диффузии собственно уравнением диффузии, поскольку две из трех причин его выбора (за исключением привычности) "работают" в гораздо более широкой области интегральных уравнений. Более того, можно привести весомый аргумент против диффузионного уравнения. Действительно, оно обычно справедливо в тех случаях, когда "эффективная длина пробега" частицы много меньше макроскопического масштаба уравнения, что с точки зрения исследуемой задачи соответствует малости хаотических относительных "дрожаний" частиц в поле турбулентности по сравнению с разделяющим их расстоянием. На самом же деле, как было указано выше, имеет место прямо противоположная ситуация – частицы, находящиеся на расстоянии l, "разводятся" дальше регулярной на этом масштабе пульсацией скорости. Это значит, что "эффективная длина пробега" здесь все время оказывается одного порядка с макроскопическим масштабом. В физике хорошо известен такой процесс – это перенос излучения в линиях в разреженной плазме [6]. Описывающее его уравнение Бибермана–Холстейна является интегральным типа свертки, то есть локально в k-, а не r-пространстве. Простейшим аналогом в рассматриваемой области будет

$$\partial T_{\mathbf{k}}/\partial t = -|\mathbf{k}|^{2/3} T_{\mathbf{k}}, \tag{4}$$

что соответствует

$$\frac{\partial T(\mathbf{l},t)}{\partial t} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\Gamma(2/3)\Delta \int \frac{T(\mathbf{l}',t)}{|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|^{5/3}} d^3\mathbf{l}'. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение очень просто решать (в силу его k-локальности), и его решение обладает необходимым свойством "потери информации", поскольку с ростом t существенный вклад в него вносят лишь все более и более близкие к нулевой гармоники (как и в привычном уравнении диффузии). Степень 2/3, естественно, возникает из необходимости удовлетворить закону Ричардсона.

Наиболее существенное отличие решения (5) от (3) – качественное изменение в поведении при $l \to \infty$. Уравнение диффузии (линейное) всегда имеет экспоненциально спадающее автомодельное решение (с разными показателями в зависимости от вида коэффициента диффузии), то есть соответствующее такому процессу T обладает конечными моментами $< l^\alpha >$ при любом положительном α. Решение же (5):

$$T(\mathbf{l},t) = \frac{1}{2\pi^2 t^{3/2}} \int_0^\infty \exp(-\kappa^{2/3}) \frac{\sin \kappa\xi}{\xi} \kappa d\kappa, \qquad \xi = \frac{l}{t^{3/2}}, \tag{6}$$

при $l \to \infty$ ($\xi \gg 1$) ведет себя как

$$T \simeq \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\Gamma(8/3)\frac{t}{l^{11/3}}, \tag{7}$$

то есть описывает процесс, в котором все моменты с $\alpha \geq 2/3$ бесконечны.

Эти "средние" бесконечности, разумеется, не означают бесконечных величин в конкретном эксперименте, а свидетельствуют о чрезвычайно быстром и разнообразном расхождении в нем частиц, что должно в сильной степени способствовать фрактальной структуре облака примеси, расплывающегося в турбулентной среде [3,4].

Можно заметить, что степенной "хвост" (7) дает линейный временной рост вероятности того, что частицы разошлись на расстояние, большее какого-то фиксированного $l_0 \gg t^{3/2}$, причем это свойство сохраняется при любом (а не только колмогоровском) спектре однородной и изотропной турбулентности. Действительно, непосредственно из (5) при учете нормировки T следует, что правая часть при $|\mathbf{l}| \to \infty$ не зависит от t: в силу нелокальности процесса основной вклад в "хвост" дают сразу попадающие сюда частицы из области $\xi < 1$, то есть "поток в большие масштабы" постоянен (если это понятие вообще применимо к интегральным уравнениям).

Вообще говоря, после использования нелокального описания турбулентного перемешивания в пространстве возникает соблазн проделать аналогичную операцию с временным оператором в левой части (5). Такое действие, однако, изменяя уравнение, не меняет его дисперсионных свойств, поэтому решение (6) остается в силе. Введение же в духе Бэтчелора явной зависимости от времени в правую часть, конечно, даст другой показатель степени в (7). Последнее слово, как всегда, остается за экспериментом.

К сожалению, автору не удалось найти в литературе данных, позволивших бы проверить высказанные здесь соображения. Основное внимание в последние годы в этой области уделяется измерению так называемой "probability density function" (см., например, [7,8] – характерные примеры непосредственного и численного эксперимента), которая дает информацию о статистике флуктуаций, но не о пространственном распределении пассивной примеси в процессе турбулентного перемешивания.

Эта работа выполнена при частичной поддержке гранта фонда Сороса, предоставленного Американским физическим обществом. Автор благодарен В.В.Янькову за ценные обсуждения.

---

1. А.С.Монин, А.М.Яглом, Статистическая гидромеханика, ч.2, М.: Наука, 1967, §24.
2. G.K.Batchelor, Proc. Cambrige Phill. Soc. **48**, 345 (1952).
3. H.G.E.Hentshel, I.Procaccia, Phys. Rev. A **29**, 1461 (1984).
4. J.O'Neil, C.Meneveau, Phys. Fluids A **5**, 158 (1993).
5. L.F.Richardson, Proc. R. Soc. London. Ser. A **110**, 709 (1926).
6. Л.М.Биберман, В.С.Воробьев, И.Т.Якубов, Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы, М.: Наука, 1982.
7. Jagesh, Z.Warkaft, Phys. Fluids A **4**, 2292 (1992).
8. S.S.Girimaji, ibid, c.2529.