Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.3, стр.225 - 230 ©1993 г. 10 августа

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА В КВАНТОВОМ ДРОБОВОМ ШУМЕ

Л.С.Левитов[+], *Г.Б.Лесовик*[*]

[+]*Massachusetts Institute of Technology*
12-112, 277, Massachusetts Ave., Cambridge, MA02139, USA

[+]*Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН*
117334 Москва, Россия

[*]*Институт физики твердого тела РАН*
142432 Черноголовка, Московской обл., Россия

[*]*Universität zu Köln, Institut für Theoretische Physik*

Поступила в редакцию 8 июля 1993 г.

Величина заряда, проходящего через квантовый проводник при низкой температуре за фиксированное время, распределена по биномиальному закону. Вывод дан при помощи раздельного рассмотрения флуктуаций потока электронов из источника и их рассеяния в проводнике. Получено обобщение на случай любого числа каналов проводимости и произвольной температуры. Для многоканальной ситуации при нулевой температуре возникает обобщенное биномиальное (бернуллиевское) распределение, вероятности исходов в котором выражаются через многочастичные вероятности рассеяния.

Введение. В режиме квантового транспорта дробовой шум, обязанный дискретности заряда, ослабляется по сравнению с классическим значением. Это происходит благодаря принципу Паули, подчиняясь которому, электроны в квантовом проводнике следуют друг за другом более регулярно, чем в классическом. В наиболее простом виде этот эффект должен проявляться в микроконтакте [1], когда рассеяние чисто упругое, а напряжение $V \gg T/e$, где T — температура в берегах. Другой интересной ситуацией является сканирующий туннельный микроскоп [2]. В обоих случаях систему можно представить как упругий рассеиватель, расположенный в канале, соединяющем два резервуара ферми-частиц [3]. Если кулоновским взаимодействием пренебречь, величину эффекта легко определить [1,2,4]. Для среднеквадратичной флуктуации заряда $q(t)$, протекшего за время t, получается

$$\langle\langle q^2(t)\rangle\rangle = \langle q^2(t)\rangle - \langle q(t)\rangle^2 = e(1-D)It \ , \tag{1}$$

где I — средний ток, а прозрачность $D = |A|^2$, где A — амплитуда прохождения. Выражение (1) множителем $1-D$ отличается от известного ответа для классического дробового шума.

Для прояснения особенностей квантового шума интересно найти распределение вероятностей различных значений заряда и сравнить его с пуассоновским распределением, описывающим классический шум. Задача изучалась путем введения в систему вспомогательного спина, прецессирующего в магнитном поле тока и таким образом измеряющего протекший заряд [5]. Найденные вероятности при $T \to 0$ почти совпадают с биномиальным распределением с вероятностями двух исходов $p = D$, $q = 1-D$ и числом попыток $geVt/h$, где t — время наблюдения, а g — спиновое вырождение. Точнее говоря, представим вероятность P_m прохождения заряда me за время t в виде

$$P_m = \sum_N \rho(N)\ p^m q^{N-m} C_N^m \ , \tag{2}$$

то есть как биномиальные распределения с различными числами попыток N, взвешенные с некоторым распределением $\rho(N)$. (Формально так можно представить любое распределение с положительными m.) Утверждается [5], что при $T = 0$ распределение $\rho(N)$ очень узкое:

$$\text{(i)}\quad \langle N\rangle = geVt/h, \qquad \text{(ii)}\quad \langle\langle N^2\rangle\rangle = \frac{g}{2\pi^2}\ln E_F t/\hbar. \tag{3}$$

Это означает, что приближенно можно написать $P_m = p^m q^{\langle N\rangle - m} C^m_{\langle N\rangle}$. Метод [5], использованный для вывода (2),(3), довольно формален, поэтому хотелось бы иметь другой вывод, пусть менее строгий, но проясняющий смысл результатов. Это и будет нашей ближайшей целью.

Флуктуации числа попыток. Связь вероятностей p, q с прозрачностью D получается из задачи о рассеянии одной частицы и пояснений не требует. Интересно обсудить формулу (3.i) для среднего числа попыток. Если пренебречь логарифмическими флуктуациями (3.ii), зависимость $\rho(N)$ от времени наблюдения t такова, как если бы попытки производились периодически с частотой geV/h. Конечно, такая картина может быть справедлива лишь приближенно, поскольку на самом деле N флуктуирует случайным образом. Оценим интенсивность флуктуаций N и покажем, что при достаточно низких температурах ими можно пренебречь по сравнению с флуктуациями, происходящими из-за рассеяния.

Рассмотрим сначала флуктуации в равновесном случае, когда разность потенциалов между берегами $V = 0$. Флуктуации протекшего за время t заряда $q(t) = \int_0^t I(t')dt'$ даются формулой

$$\langle\langle q^2(t)\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}\langle\langle I_\omega^2\rangle\rangle\frac{d\omega}{2\pi} \ , \tag{4}$$

где флуктуации тока по флуктуационно-диссипационной теореме выражаются через проводимость G_ω : $\langle\langle I_\omega^2\rangle\rangle = \hbar\omega G_\omega \mathrm{cth}\hbar\omega/2T$. Подставляя в (4), получаем

$$\langle\langle q^2(t)\rangle\rangle = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\hbar G_0 \ln\omega_0 t & T \ll \hbar/t \\ 2TG_0 t + \frac{2}{\pi}\hbar G_0 \ln\hbar\omega_0/T, & T \gg \hbar/t \end{cases} \ , \tag{5}$$

где ω_0 — характерная частота дисперсии проводимости.

Теперь мы можем найти флуктуации числа частиц N_L и N_R, выходящих из левого и правого резервуаров за время t. С этой целью рассмотрим полностью открытый канал, для которого, как известно [3], $G_0 = ge^2/h$. В этом случае отсутствуют флуктуации, связанные с рассеянием, и формула (5) как раз и дает флуктуации равновесного потока частиц, проходящих через систему без отражения. Можно связать флуктуации заряда $q(t)$ с флуктуациями потока из левого и правого берегов, поскольку $q(t) = e(N_L - N_R)$. В равновесии средний ток равен нулю, то есть $\langle N_L\rangle = \langle N_R\rangle$, и оба потока статистически независимы, поэтому

$$\langle\langle N_L^2\rangle\rangle = \langle\langle N_R^2\rangle\rangle = \frac{1}{2e^2}\langle\langle q^2(t)\rangle\rangle.$$

Перейдем к неравновесному случаю $V \neq 0$. Будем считать, что флуктуации потоков N_L и N_R такие же, как в равновесии. Это справедливо, если время энергетической релаксации в берегах достаточно мало, так что к тому моменту, когда прошедшие частицы возвращаются обратно в контакт, они успели термализоваться. Разность потоков $N_L - N_R$, как известно [3], есть $geVt/h$. Пусть температура T очень мала. Тогда, как видно из (5), $\langle\langle N^2_{L(R)}\rangle\rangle \ll |\langle N_L - N_R\rangle|$ для всех достаточно больших t, то есть флуктуации потока весьма малы. Физически однородность потока связана с принципом Паули, запрещающим частицам проходить через контакт одновременно.

Теперь снова включим рассеяние. Частицы проходят или отражаются с вероятностями $p = D$ и $q = 1 - D$. При этом для вероятности прохождения нескольких частиц будет справедлива формула (2), в которой $\rho(N)$ — распределение величины $N_L - N_R$. При $T = 0$ из (5) находим логарифмическую зависимость $\langle\langle N^2\rangle\rangle$ от t, совпадающую с (3). Для флуктуации числа частиц, распределенных согласно (2), легко получить выражение

$$\langle\langle m^2\rangle\rangle = p^2\langle\langle N^2\rangle\rangle_\rho + pq\langle N\rangle_\rho. \tag{6}$$

Здесь первый член связан с флуктуациями потока налетающих частиц, а второй — с рассеянием. Видим, что неоднородностью потока можно пренебречь, если $p\langle\langle N^2\rangle\rangle \ll q\langle N\rangle$, то есть при

$$DT \ll (1 - D)eV \tag{7}$$

Это и есть критерий того, что разброс по числу попыток менее важен, чем разброс, определяемый биномиальным распределением со средним числом попыток. При условии (7) P_m дается биномиальным распределением $p^m q^{\langle N\rangle - m} C^m_{\langle N\rangle}$ со средним числом попыток.

Из приведенного вывода биномиального распределения видно, что существенными факторами являются только упругость рассеяния и низкая температура. Логарифмические флуктуации числа попыток при $T = 0$ никак не связаны с предполагавшейся ранее одномерностью [5], а получаются прямо из формулы Каллена-Вельтона одинаково для любой размерности пространства и любой геометрии проводника. Отметим, что эти флуктуации тем не менее родственны флуктуациям плотности одномерных фермионов, но только не вдоль пространственной, а вдоль временной оси.

В двух предельных случаях биномиальное распределение переходит в пуассоновское: $D \to 0$ и $D \to 1$. Первый соответствует классическому дробовому шуму, а второй — транспорту в почти безотражательной системе. (Во втором случае пуассоновским является распределение не числа прошедших, а числа отраженных частиц.)

Общая формула для многоканального случая. Можно получить аналитическое выражение для распределения заряда, верное при любом соотношении T и eV и произвольном числе каналов. Пусть имеется M подводов тока (будем говорить о них как о каналах) и матрица рассеяния A_{jk} (унитарная, $M \times M$). Распределение частиц, летящих из каналов, фермиевское, $n_j(E) = 1/(e^{(E-\mu_j)/T} + 1)$, где μ_j — химпотенциал в j-м резервуаре. Введем M вещественных переменных λ_j, $j = 1, ..., M$ и построим характеристическую функцию, фурье-образ которой дает вероятности различных значений заряда. Определим матрицы $\tilde{A}$ и n_E как $\tilde{A}_{jk} = e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}A_{jk}$, $(\mathrm{n}_E)_{jk} = n_j(E)\delta_{jk}$, и рассмотрим детерминант

$$\chi_E(\vec{\lambda}) = \det(1 - \mathbf{n}_E + \mathbf{n}_E A^+ \tilde{A}), \tag{8}$$

как мы увидим, имеющий смысл характеристической функции распределения прошедшего заряда для частиц с энергией в бесконечно узкой полосе вблизи E. Покажем, что полная характеристическая функция есть

$$\chi(\vec{\lambda}) = \exp\ \left[gt \int \ln \chi_E(\vec{\lambda})\ \frac{dE}{2\pi\hbar}\ \right]. \tag{9}$$

Для этого раскроем детерминант (8):

$$\chi_E(\vec{\lambda}) = \sum_{i_1,\dots,i_k} (A^+\tilde{A})^{i_1,\dots,i_k}_{i_1,\dots,i_k} \prod_{i \neq i_\alpha} 1 - n_i(E) \prod_{i = i_\alpha} n_i(E). \tag{10}$$

Суммирование идет по всем наборам не равных друг другу i_α: $1 \le i_\alpha \le M$, $i_\alpha \neq i_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, k \le M)$. Обозначение $S^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}$ — минор матрицы S с номерами строк $i_1, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, \dots, j_k$. Заметим теперь, что

$$(A^+\tilde{A})^{i_1,\dots,i_k}_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{j_1,\dots,j_k} e^{i(\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k} - \lambda_{i_1} - \dots - \lambda_{i_k})} |A^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}|^2. \tag{11}$$

Суммирование по $j_1, \dots, j_k$ такое же, как в (10). Подставим (11) в (10):

$$\chi_E(\vec{\lambda}) = \sum_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k} e^{i(\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k} - \lambda_{i_1} - \dots - \lambda_{i_k})} P_{i_1,\dots,i_k|j_1,\dots,j_k}\ , \tag{12}$$

где

$$P_{i_1,\dots,i_k|j_1,\dots,j_k} = |A^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}|^2 \prod_{i \neq i_\alpha} 1 - n_i(E) \prod_{i = i_\alpha} n_i(E)$$

содержит квадрат амплитуды перехода k частиц из каналов $i_1, \dots, i_k$ в каналы $j_1, \dots, j_k$ и произведение вероятностей того, что частицы приходят из каналов $i_1, \dots, i_k$, а из остальных каналов не приходит ничего. Поэтому $P_{i_1,\dots,i_k|j_1,\dots,j_k}$ есть просто вероятность того, что k зарядов переходят из каналов $i_1, \dots, i_k$ в каналы $j_1, \dots, j_k$.

Вероятностный смысл формулы (8) выяснен. Для перехода от (8) к (9) заметим, что состояния с различными энергиями рассеиваются независимо, без интерференции. Поток частиц с энергиями в интервале δE дается формулой $\delta N = \frac{gt}{2\pi\hbar}\delta E$. Откуда, имея в виду сделанное замечание, получаем (9).

Отметим, что вероятности $P_{i_1,\dots,i_k|j_1,\dots,j_k}$, совпадающие с нашими, рассматривались в контексте задачи о флуктуациях прошедшего заряда в одномерном случае [6], $M = 2$, и были использованы для вычисления интенсивности дробового шума (1). Однако характеристическая функция и распределение заряда не обсуждались.

Пример. Рассмотрим "тройник" [6], систему в форме буквы Y, содержащую три канала, и найдем характеристическую функцию. Для простоты будем считать $T = 0$ и пронумеруем каналы так, чтобы выполнялось $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$. Матрица рассеяния A_{jk} есть унитарная матрица 3×3. Поскольку $T = 0$, произведения $n_j(E)$ и $1 - n_j(E)$, входящие в $P_{i_1,\ldots,i_k|j_1,\ldots,j_k}$, равны 1 или 0, в зависимости от соотношения между E и μ_1, μ_2, μ_3. Поэтому

$$\chi_E(\vec{\lambda}) = \begin{cases} 1\ , & E > \mu_1 \text{ или } \mu_3 > E \\ \chi_1(\vec{\lambda}) = P_{1|1} + P_{1|2}e^{i(\lambda_2-\lambda_1)} + P_{1|3}e^{i(\lambda_3-\lambda_1)}\ , & \mu_1 > E > \mu_2 \\ \chi_2(\vec{\lambda}) = P_{12|12} + P_{12|13}e^{i(\lambda_3-\lambda_2)} + P_{12|23}e^{i(\lambda_3-\lambda_1)}\ , & \mu_2 > E > \mu_3 \end{cases} \tag{13}$$

Согласно (9) и (13) характеристическая функция факторизуется:

$$\chi(\vec{\lambda}) = \chi_1(\vec{\lambda})^{g(\mu_1-\mu_2)t/h}\chi_2(\vec{\lambda})^{g(\mu_2-\mu_3)t/h}\ . \tag{14}$$

Это означает, что распределение возникает как результат двух независимых случайных процессов, каждый из которых представляет собой бернуллиевский процесс с тремя исходами, вероятности которых есть $P_{1|i} = |A_{1i}|^2$ и $P_{12|ij} = |A_{1i}A_{2j} - A_{1j}A_{2i}|^2$, а частота испытаний равна $g(\mu_1-\mu_2)/h$ для первого процесса и $g(\mu_2 - \mu_3)/h$ для второго.

Интересно отметить, что в случае трех каналов двухчастичные вероятности выражаются через одночастичные. Это есть следствие унитарности матрицы рассеяния и известных тождеств для миноров, типа $A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} = (A^{-1})_{13}\det(A)$ и т.п. Поэтому $P_{12|12} = P_{3|3}$, $P_{12|13} = P_{3|2}$, $P_{12|23} = P_{3|1}$. Физически этот результат можно понять, перейдя от электронов к дыркам, при этом два заполненных канала и один пустой превращаются в один заполненный (дырками) и два пустых, а одночастичные амплитуды рассеяния дырок комплексно сопряжены амплитудам рассеяния электронов.

Аналогично можно рассмотреть при $T = 0$ случай произвольного числа каналов M. При этом возникнет $M - 1$ независимых бернуллиевских процессов, соответствующих различному числу заполненных каналов. Отличие от рассмотренного примера состоит в том, что при $M > 3$ многочастичные вероятности, вообще говоря, нельзя выразить через одночастичные вероятности. (Но, разумеется, их можно выразить через одночастичные амплитуды.)

В заключение скажем несколько слов о нашей работе [7], в которой распределение вычислялось методом проектирования на собственные функции оператора заряда, прошедшего за фиксированное время $\hat{Q}_t = \int_0^t \hat{j}(x,t')dt'$, что соответствует стандартному подходу к описанию измерений в квантовой механике. Вычисление приводит к биномиальному распределению с дробным квантом заряда и с вероятностями исходов, отличными от D и $1 - D$, но, в то же время, правильно дающему первый и второй моменты. Причина расхождения с правильным результатом, полученным строгим вычислением [5] и подтвержденным в настоящей работе, заключается в том, что проектирование на собственные состояния оператора $\hat{Q}_t$ на самом деле не соответствует никакой реальной схеме измерения заряда, то есть нефизично. Вопрос об измерении заряда в данном случае оказывается достаточно тонким и требует анализа путем включения измерителя в гамильтониан задачи [5]. В то же время отметим, что проектирование на собственные состояния $\hat{Q}_t$, хотя и не может считаться корректным подходом, все же приводит к биномиальному распределению, то есть правильно описывает главную особенность задачи — малые флуктуации числа попыток.

Мы благодарны J.Imry за ценные обсуждения, помогшие четче сформулировать картину двух независимых вкладов во флуктуации: от источника частиц

и от их рассеяния. Часть работы выполнена в Weizmann Institute of Science. Один из нас (Л.Л.) благодарен фонду Альфреда П. Слоана за поддержку.

1. Г.Б.Лесовик, Письма в ЖЭТФ **49**, 513 (1989).
2. B.Yurke, G.P.Kochanski, Phys. Rev. **B 41**, 8184 (1990).
3. R.Landauer, In: Localization, Interaction and Transport Phenomena, eds. B.Kramer, G.Bergmann, and Y.Bruynseraede (Springer, Heidelberg, 1985) **61**, 38 (1985).
4. M.Büttiker, Phys. Rev. Lett. **65**, 2901 (1990).
5. L.S.Levitov, and G.B.Lesovik, Binomial distribution in the quantum shot noise, preprint.
6. Th.Martin and R.Landauer, Phys. Rev. **B**, **45**, 1742 (1992).
7. Л.С.Левитов, Г.Б.Лесовик, Письма в ЖЭТФ **55**, 534 (1992).