

ПОВЕРХНОСТНАЯ НОРМАЛЬНАЯ КОМПОНЕНТА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

А.Ф.Андреев

*Институт физических проблем им. П.Л.Капицы РАН
117334 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 июля 1993 г.

Поверхностная плотность нормальной компоненты сверхтекучей жидкости, характеризующая сверхтекучее течение вдоль поверхности твердого тела, определяется статистическими свойствами шероховатостей поверхности. Выяснено влияние шероховатостей поверхности подложки на скорость третьего звука в гелиевых пленках. Обсуждаются экспериментальные данные.

Поверхностная нормальная компонента сверхтекучей жидкости рассматривалась ранее [1] в связи со свойствами свободной поверхности жидкости. В этом случае формирование поверхностной нормальной компоненты происходит за счет поверхностных элементарных возбуждений (рипплон) и ее плотность выражается через энергетический спектр возбуждений формулой, являющейся двумерным аналогом известной формулы Ландау. В настоящей работе поверхностная нормальная компонента введена как макроскопическая характеристика границы жидкости с твердым телом. Плотность поверхностной нормальной компоненты определяется статистическими свойствами случайных статических шероховатостей твердой поверхности. Наличие шероховатостей обуславливает появление вблизи поверхности нерегулярностей в однородном потоке сверхтекучей компоненты, что приводит к уменьшению среднего потока массы. В макроскопическом описании это означает появление добавочной плотности нормальной компоненты, покоящейся относительно стенок. Характерным свойством рассматриваемой поверхностной нормальной плотности является ее конечность при нуле температуры, что играет важную роль в области достаточно низких температур.

Поверхностная нормальная компонента проявляет себя при распространении волн третьего звука в сверхтекучих пленках. Величина поверхностной нормальной плотности определяет, как мы увидим, влияние шероховатостей подложки на зависимость скорости третьего звука от толщины пленки. Здесь интересно отметить, что вклад шероховатостей поверхности в плотность нормальной компоненты определяется той же самой корреляционной функцией шероховатостей, которая определяет (конечно, если твердое тело является металлом) коэффициент отражения электронов от этой поверхности со стороны металла (см., например, [2]). Сверхтекучие свойства пленки оказываются непосредственно связаны с электронными свойствами металлической подложки.

1. Пусть $z = \zeta(\vec{\rho})$, $\vec{\rho} = (x, y)$ есть уравнение поверхности, разделяющей твердое тело ($z < \zeta$) и сверхтекучую жидкость ($z > \zeta$). Статистические свойства случайных шероховатостей поверхности можно характеризовать заданием корреляционной функции

$$\langle \zeta(\vec{\rho})\zeta(\vec{\rho}') \rangle = \xi^2 w(\vec{\rho} - \vec{\rho}'), \quad (1)$$

где $\xi^2 \equiv \langle \zeta^2 \rangle$ имеет смысл среднеквадратичной амплитуды шероховатости, а $w(0) = 1$. Поверхность считаем в среднем плоской, так что $\langle \zeta(\vec{\rho}) \rangle = 0$.

Вводя гармоники Фурье функции $\zeta(\vec{\rho})$ согласно

$$\zeta(\vec{\rho}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \zeta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\vec{\rho}}$$

и аналогично для $w(\vec{\rho})$, получим

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \xi^2 w_{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

причем

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} w_{\mathbf{k}} = 1. \quad (3)$$

Величины $w_{\mathbf{k}}$ положительны, так как в силу (2) имеем $\langle |\zeta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = (2\pi\xi)^2 \delta(0) w_{\mathbf{k}} = S \xi^2 w_{\mathbf{k}}$ (S – полная площадь поверхности). Они представляют собой плотность вероятности распределения шероховатостей по значениям двумерного волнового вектора \mathbf{k} . Формула (3) играет роль условия нормировки для вероятностей.

Предположим, что характерные значения волнового вектора шероховатости удовлетворяют условию $k\xi \ll 1$, и рассмотрим возмущение, вносимое шероховатостью в однородный поток сверхтекучей жидкости со скоростью $v_s^{(0)}$, параллельной средней поверхности твердого тела $z = 0$. При малых значениях скорости сверхтекучую компоненту можно считать несжимаемой, так что потенциал сверхтекучей скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \mathbf{v}_s = \nabla\varphi. \quad (4)$$

Амплитуда шероховатости $\zeta(\vec{\rho})$, как мы предположили выше, также мала. Будем поэтому разлагать все величины в ряд по степеням ζ , обозначая символами $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots; \mathbf{v}_s^{(1)}, \mathbf{v}_s^{(2)}, \dots$ члены разложения потенциала и скорости, пропорциональные соответственно ζ, ζ^2, \dots

Общее решение уравнения (4), удовлетворяющее условию конечности $\varphi^{(1)}$ на бесконечности $z = \infty$, имеет вид

$$\varphi^{(1)}(\vec{\rho}, z) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\vec{\rho} - kz}. \quad (5)$$

Величины $a_{\mathbf{k}}$ определяются соотношением

$$v_{s,z}^{(1)} = -v_s^{(0)} \frac{\partial \zeta}{\partial \vec{\rho}}$$

при $z = 0$, вытекающим из условия обращения в нуль на поверхности твердого тела нормальной к поверхности компоненты скорости. Имеем:

$$a_{\mathbf{k}} = -i \frac{k v_s^{(0)}}{k} \zeta_{\mathbf{k}}. \quad (6)$$

Рассмотрим изменение p_{α} , ($\alpha = x, y$) полного потока массы жидкости, вызванное наличием шероховатостей поверхности:

$$p_\alpha = \int_{\zeta(\vec{\rho})}^{\infty} dz (j_\alpha - \rho_s v_{s\alpha}^{(0)}), \quad (7)$$

где $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s$ – вектор плотности потока массы, ρ_s – объемная плотность сверхтекучей компоненты. Вычислим среднее значение $\langle p_\alpha \rangle$. Так как среднее значение любой линейной по ζ величины равно нулю, из формулы (7) получаем

$$\langle p_\alpha \rangle = -\rho_s \langle \zeta(\vec{\rho}) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\vec{\rho}} i k_\alpha \rangle + \rho_s \int_0^\infty dz \langle v_{s\alpha}^{(2)} \rangle. \quad (8)$$

Заметим, что среднее значение $\langle v_{s\alpha}^{(2)} \rangle$ не зависит от $\vec{\rho}$ просто потому, что усреднение здесь можно понимать как усреднение по $\vec{\rho}$. В силу условия $\text{rot} \mathbf{v}_s^{(2)} = 0$ входящие в формулы (8) средние значения $\langle v_{s\alpha}^{(2)} \rangle$ не зависят от z и представляют собой, таким образом, просто постоянные, которые должны быть включены в перенормировку $v_{s\alpha}^{(0)}$. Второй член в формуле (8) следует поэтому опустить, понимая под $v_{s\alpha}^{(0)}$ значения скорости $v_{s\alpha}$ при $z \rightarrow \infty$. Обратим внимание на то, что прямое вычисление $v_{s\alpha}^{(2)}$ с помощью разложения по степеням ζ приводит к расходящимся выражениям.

Первый член в формуле (8) легко вычислить, подставляя разложение Фурье для $\zeta(\vec{\rho})$ и производя усреднение согласно формуле (2). В результате получаем

$$\langle p_\alpha \rangle = -\nu_{\alpha\beta}^{(n)} v_{s\beta}^{(0)}, \quad (9)$$

где величины

$$\nu_{\alpha\beta}^{(n)} = \rho_s \xi^2 \langle \frac{k_\alpha k_\beta}{k} \rangle \quad (10)$$

имеют смысл двумерного тензора искомой плотности поверхностной нормальной компоненты. Символы усреднения в применении к функциям $f(\mathbf{k})$ двумерного волнового вектора в формуле (10) и ниже имеют смысл усреднения по распределению (3):

$$\langle f(\mathbf{k}) \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} f(\mathbf{k}) w_{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

По порядку величины имеем $\nu^{(n)} \sim \rho_s \xi^2 k \sim \rho_s \xi^2 / l$, где $l \sim 1/k$ – характерная "длина волны" шероховатостей. Характерная толщина слоя, в котором эффективная плотность сверхтекучей компоненты существенно уменьшена по сравнению с ее значением на бесконечности $z \rightarrow \infty$, по порядку величины равна ξ^2 / l . В силу сделанного выше предположения $\xi \ll l$ эта толщина в области применимости полученных формул значительно меньше ξ , но может значительно превосходить межатомное расстояние.

2. Полученные формулы дают возможность выяснить влияние шероховатостей подложки на скорость распространения волн третьего звука в сверхтекучих пленках. Квадрат скорости третьего звука определяется (см., например, [4]) выражением вида

$$u^2 = \nu_{\alpha\beta}^{(s)} n_\alpha n_\beta F(T, d), \quad (12)$$

где $F(T, d)$ – функция толщины пленки d , температуры T , а также типа подложки, $\nu_{\alpha\beta}^{(s)}$ – полная "масса" сверхтекучей компоненты, приходящаяся на единицу площади пленки, \mathbf{n} – единичный вектор вдоль направления распространения волны третьего звука. Результаты предыдущего раздела дают возможность вычислить $\nu_{\alpha\beta}^{(s)}$ в случае, когда толщина пленки является самым большим параметром длины задачи $d \gg l \gg \xi$. В этом случае в силу (7) и (9) имеем

$$\nu_{\alpha\beta}^{(s)} = \rho_s d \delta_{\alpha\beta} - \nu_{\alpha\beta}^{(n)}. \quad (13)$$

Соотношение (13) аналогично эмпирической формуле Шольца, Мак-Лина и Рудника [3]:

$$\nu^{(s)} = \rho_s (d - D), \quad (14)$$

описывающей (см. [4]) область малых толщин пленок $d < 5-6$ атомных слоев. Ниже мы обсудим связь формулы (13) с экспериментальными данными Смита и Халлока [4] в области больших d . А здесь лишь заметим, что постоянная D , которая всегда порядка 2–3 ат. слоев, в отличие от $\nu^{(n)}$ не зависит от природы подложки. В частности, Смитом и Халлоком [4] было продемонстрировано, что D имеет одинаковое значение для гелиевых пленок на гладких и травленных поверхностях кремния.

Отношение квадратов скоростей третьего звука для двух пленок равной толщины d , находящихся в одинаковых условиях, но одна из которых (r) находится на шероховатой подложке, а другая (i) на подложке из того же материала, но ровной, согласно (12) и (13) равно

$$\frac{u_r^2}{u_i^2} = 1 - \frac{\nu^{(n)}}{\rho_s d}, \quad (15)$$

где $\nu^{(n)} = \nu_{\alpha\beta}^{(n)} n_\alpha n_\beta$. Второй, поправочный, член в формуле (15) в условиях $d \gg l$, таким образом, обратно пропорционален d .

3. Рассмотрим обратный предельный случай, когда выполнено условие $d \ll l \sim 1/k$. Толщина пленки в этом случае является малым параметром, и можно производить разложение всех величин по степеням координаты z , отсчитываемой от середины пленки. В нулевом приближении скорость сверхтекучей компоненты постоянна по толщине пленки и параллельна ее поверхности:

$$v_{s\alpha} = v_{s\alpha}^{(0)}, \quad v_{sz} = v_{s\alpha}^{(0)} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_\alpha}, \quad (16)$$

где $v_{s\alpha}^{(0)}$ – постоянные.

Из условия потенциальности $\partial v_{s\alpha} / \partial z = \partial v_{sz} / \partial \rho_\alpha$ находим

$$\frac{\partial v_{s\alpha}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} \left(v_{s\beta}^{(0)} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_\beta} \right) = v_{s\beta}^{(0)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta},$$

так что

$$v_{s\alpha}(z) = v_{s\alpha}^{(0)} + z \left(v_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_\alpha}. \quad (17)$$

Можно, очевидно, считать, что двум границам пленки, находящейся на шероховатой подложке с $l \gg d$, соответствуют значения $z = z(\vec{\rho}) = \pm(d/2) + \zeta(\vec{\rho})$. Вычислим среднее значение полного потока массы:

$$\begin{aligned} \langle J_\alpha \rangle = & \rho_s \left\langle \int_{-\frac{d}{2} + \zeta(\rho)}^{\frac{d}{2} + \zeta(\rho)} dz v_{s\alpha}(z) \right\rangle = \rho_s d v_{s\alpha}^{(0)} + \\ & + \left\langle \left(v_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_\alpha} \int_{-\frac{d}{2} + \zeta(\rho)}^{\frac{d}{2} + \zeta(\rho)} z dz \right\rangle = \rho_s d v_{s\alpha}^{(0)} + \rho_s d \left(v_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \right) \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_\alpha} \zeta \right\rangle. \end{aligned}$$

Подставляя разложение Фурье для $\zeta(\bar{\rho})$ и производя усреднение согласно (2), находим

$$\langle J_\alpha \rangle = \nu_{\alpha\beta}^{(s)} v_{s\beta}^{(0)}, \quad (18)$$

где $\nu_{\alpha\beta}^{(s)}$ определяется, как и выше, формулой (13), но теперь вместо (10) имеем

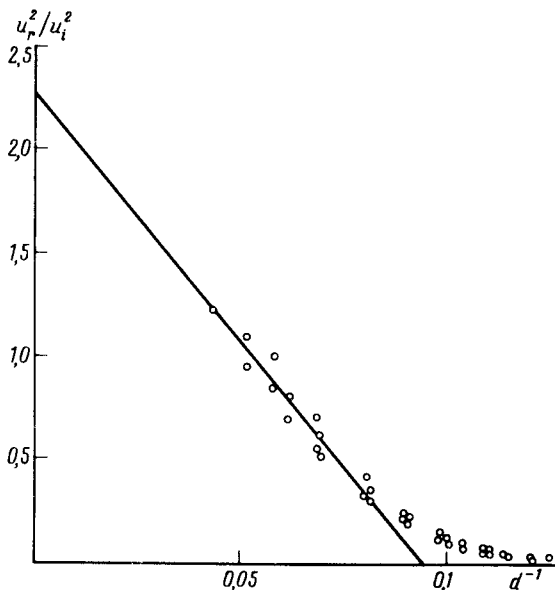
$$\nu_{\alpha\beta}^{(n)} = \rho_s d \xi^2 \langle k_\alpha k_\beta \rangle. \quad (19)$$

Эффективная двумерная плотность нормальной компоненты в пленке толщины $d \ll l$ согласно формуле (19) по порядку величины равна $\rho_s d (\xi^2 / l^2)$.

Отношение квадратов скоростей третьего звука для пленки на шероховатой подложке и для такой же пленки на ровной поверхности той же толщины в условиях $d \ll l$ определяется формулой

$$\frac{u_r^2}{u_i^2} = 1 - \xi^2 \langle (kn)^2 \rangle, \quad (20)$$

то есть не зависит от толщины пленки d .



Отношение квадратов скоростей u_r^2/u_i^2 третьего звука для пленок жидкого ${}^4\text{He}$ при температуре $T = 1,42\text{ K}$ на поверхности кремния, подвергнутого травлению (r), и на гладкой поверхности (i) от обратной толщины пленки (в атомных слоях, 1 ат. слой = $3,6\text{ \AA}$, см [3]). Прямая соответствует уравнению $u_r^2/u_i^2 = 2,28 - 24,2/d$

4. Рассмотрим, наконец, более общий случай, когда на поверхности одновременно имеется два типа шероховатостей, характерные значения "длин

волн" которых соответственно много больше и много меньше толщины пленки. Крупномасштабные и мелкомасштабные шероховатости в этом случае дают, очевидно, свой независимый вклад в $\nu_{\alpha\beta}^{(n)}$. В результате получаем

$$\frac{u_r^2}{u_i^2} = 1 - \xi_1^2 < (kn)^2 >_1 - \frac{\xi_2^2}{d} < \frac{(kn)^2}{k} >_2, \quad (21)$$

где ξ_1^2 и ξ_2^2 – среднеквадратичные амплитуды соответственно крупномасштабных и мелкомасштабных шероховатостей, индексами 1 и 2 обозначены усреднения по спектрам шероховатостей соответствующего типа. Зависимость отношения квадратов скоростей третьего звука от толщины пленки определяется, таким образом, выражением вида $A - B/d$. Постоянная B определяется мелкомасштабными шероховатостями. Крупномасштабные шероховатости обуславливают отличие A от единицы.

Одновременное измерение скоростей третьего звука для пленок жидкого ^4He на шероховатых и гладких поверхностях кремния производилось Смитом и Халлоком [4]. Зависимость u_r^2/u_i^2 от толщины пленки d имела сложный немонотонный характер в области малых толщин: На рисунке представлена часть данных работы [4], соответствующая толщинам, превышающим 8 атомных слоев. Линейная зависимость от обратной толщины, соответствующая формуле (21), наблюдается для толщин, больших 12. Это вполне соответствует развиваемой теории, поскольку она носит макроскопический характер и применима для достаточно больших толщин. Удивление вызывает, однако, тот факт, что предельное отношение квадратов скоростей при $d \rightarrow \infty$ равно примерно 2,3, т.е. больше единицы. В рамках развиваемого здесь подхода единственным объяснением могло бы быть предположение о том, что поверхность (i) по отношению к крупномасштабным шероховатостям является в действительности менее гладкой, чем подвергнутая травлению поверхность (r). Заметим также, что постоянная $B = 24,2$ (в отличие от D в формуле (14)) значительно превосходит межатомное расстояние, что, как отмечалось выше, вполне соответствует развиваемой теории.

Выражаю благодарность К.О.Кешишеву, А.Я.Паршину и В.С.Эдельману за полезное обсуждение работы.

-
1. А.Ф.Андреев, Д.А.Компанец, ЖЭТФ **61**, 2459 (1971).
 2. А.Ф.Андреев, УФН **105**, 113 (1971).
 3. J.H.Sholtz, E.O.McLean and I.Rudnick, Phys. Rev. Lett. **32**, 147 (1974).
 4. D.T.Smith and R.V.Hallock, Phys. Rev. **B34**, 226 (1986).