Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.6, стр.440 - 443 ©1993 г. 25 сентября

ТЕОРИЯ КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФЛУКТУИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ – МЕМБРАН

В.Л.Голо, Е.И.Кац*

**Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова*
119899 Москва, Россия
Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 августа 1993 г.

Релаксационная динамика флуктуаций формы мембраны сформулирована в рамках ланжевеновского уравнения для матричного кирального поля, построенного с помощью локального репера Френе. Концепция кирального поля оказывается плодотворной, позволяя построить формально замкнутую схему вычисления любых корреляционных функций флуктуаций формы для мембраны любой (в том числе и не фиксированной) топологии. Информация о внутренней геометрии поверхности фигурирует в виде явной зависимости корреляционных функций от киральных токов. В качестве иллюстрации метода в общем виде доказана флуктуационно - диссипационная теорема и найдена парная корреляционная функция флуктуаций средней кривизны.

1. Мембраны являются объектами молекулярной толщины, имеющие макроскопическую протяженность, то есть математическим образом мембраны может служить двумерная поверхность, вложенная в трехмерное пространство. Естественно поэтому для описания свойств мембран (и, разумеется, образованных из них разнообразных лиотропных систем [1]) использовать методы классической теории поверхностей.

Основной конструкцией, используемой в теории поверхностей [2], является локальный репер $\hat{X}$, образованный векторами касательных $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ и нормали $\mathbf{N}$ к поверхности:

$$\hat{X} = \{\partial \mathbf{r}/\partial\sigma^1,\ \partial\mathbf{r}/\partial\sigma^2,\ \mathbf{N}\} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, задающий произвольную точку мембраны, σ^μ $(\mu = 1,2)$ – координаты на поверхности.

Изменение локального репера от точки к точке поверхности описывается уравнениями Гаусса – Вайнгартена [2]:

$$\partial_\mu \hat{X} = \hat{j}_\mu \hat{X}; \quad \mu = 1,2, \quad \partial_\mu = \partial/\partial\sigma^\mu. \tag{2}$$

Матрицы j_μ определяются геометрией поверхности и удовлетворяют условиям интегрируемости:

$$\partial_1 \hat{j}_2 - \partial_2 \hat{j}_1 + [\hat{j}_1, \hat{j}_2] = 0 \tag{3}$$

где $[.,.]$ – коммутатор. Нахождение явного вида матриц $\hat{j}_\mu$ представляет собой хотя и громоздкую, но не сложную в принципе процедуру. В общем случае компоненты этих матриц задаются символами Кристофеля и тензорами первой и второй квадратичной формы поверхности.

Выражения (1) и (2) позволяют определить все свойства поверхности в рамках теории кирального поля, задаваемого матрицами $\hat{X}$, принадлежащими группе GL(3, R). Например, из (2) следует обычное в теории кирального поля выражение для токов [3]:

$$\hat{j}_\mu = \partial_\mu \hat{X} \hat{X}^{-1}. \tag{4}$$

2. Аналогия с киральным полем оказывается не формальной, а приводит к целому ряду полезных выводов. Детальному обсуждению этого круга вопросов будет посвящена специальная работа. Здесь же мы обратим внимание на некоторые принципиальные моменты.

В теории мембран основную роль играет гамильтониан Хельфрича [4], описывающий зависимость энергии мембраны от ее формы:

$$E_H = \int d^2x\{\frac{1}{2}\kappa(k_h)^2 + \bar{\kappa}k_g\}. \tag{5}$$

Здесь κ и $\bar{\kappa}$ – упругие модули мембраны, k_h – средняя кривизна, k_g – гауссова кривизна (для простоты мы рассматриваем бислойные, то есть симметричные, мембраны и поэтому в (5) отсутствует линейный по k_h вклад). Именно возможность записать энергию Хельфрича (5) только через киральные токи $\hat{j}_\mu$ и делает концепцию кирального поля весьма полезной для описания мембран. Действительно,

$$k_h = \mathrm{Tr}(\hat{\varphi}^{(2)}\hat{g}^{-1}), \qquad k_g = \det(\hat{\varphi}^{(2)}\hat{g}^{-1}),$$

где $\hat{\varphi}^{(2)}$ – вторая квадратичная форма поверхности, $\hat{g}$ – метрический тензор (первая квадратичная форма).

Как известно, интеграл от гауссовской кривизны является топологическим инвариантом и потому, если мы рассматриваем поверхность фиксированной топологии, энергия Хельфрича (5) может быть записана в следующем виде:

$$E_H = \int d^2x a^{\mu\nu}_{ijkl} j^\mu_{ij} j^\nu_{kl} = \frac{1}{2}\kappa \int d^2x (j^1_{31} + j^2_{32})^2. \tag{6}$$

Последнее равенство и является определением матрицы коэффициентов $a^{\mu\nu}_{ijkl}$.

Равновесная форма поверхности определяется условием минимума функционала (6), имеющим следующий вид:

$$\nabla_\mu(\hat{a}^{\mu\nu}\hat{j}_\mu) = 0 \tag{7}$$

где ∇_μ – ковариантная производная:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + [\hat{j}_\mu,] \tag{8}$$

3. Для описания флуктуаций мембраны определим согласно с (2) компоненту тока $\hat{j}_0$, задающую изменение формы мембраны со временем:

$$\hat{j}_0 = \partial_t \hat{X}\hat{X}^{-1}. \tag{9}$$

Если обозначить матрицей $\delta\hat{v}$ вариацию кирального поля:

$$\hat{X} \to \hat{X}(1 + \delta\hat{v}),$$

то

$$\hat{j}_\mu \to \hat{j}_\mu + \nabla_\mu \delta\hat{v} \quad \text{и} \quad \hat{j}_0 = \partial_t \partial\hat{v}. \tag{10}$$

В работе [5] было показано, что для изолированной мембраны, находящейся в равновесии с раствором, существует одна самая мягкая приповерхностная мода, описывающая чистую релаксацию поверхности к равновесной форме. Важным является то обстоятельство, что этот факт остается справедливым и при учете нелинейных эффектов. Поэтому в главном гидродинамическом приближении все остальные более жесткие моды могут быть исключены, что приводит к некоторому эффективному уравнению ланжевеновской динамики вида

$$\partial_t \delta\hat{v} = \gamma(\delta E_H/\delta v) + y. \tag{11}$$

Здесь γ – эффективный кинетический коэффициент, y – гауссовский случайный шум.

Используя определения киральных токов (4) и явный вид энергии Хельфрича (6) можно преобразовать это уравнение к замкнутому виду, удобному для вычислений:

$$\partial_t \delta\hat{v} = \nabla_\mu(\hat{a}^{\mu\nu}\hat{j}_\mu) + y. \tag{12}$$

В простейшем случае малых флуктуаций $\delta\hat{v}$ линеаризованная правая часть уравнения (12) имеет вид:

$$\gamma\{\partial_\mu(\hat{a}^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\hat{v}) + [\nabla_\mu\delta\hat{v}, \hat{a}^{\mu\nu}\hat{j}_\nu^{(0)}] + [\hat{j}_\mu^{(0)}, \hat{a}^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\hat{v}]\} + y \tag{13}$$

($j_\mu^{(0)}$ – равновесное значение кирального тока, то есть решение уравнения (7)).

Стандартным образом [6] изучение ланжевеновского уравнения (12) или (13), например, нахождение корреляторов флуктуаций $\delta\hat{v}$, может быть сформулировано как вычисление интеграла по путям с эффективным действием:

$$S_{eff} = \int d^2x dt\{-p(\partial_t\delta\hat{v} - \hat{M}\delta\hat{v} + (1/2\gamma)p) + \bar{\psi}(\partial_t - \hat{M})\psi\}. \tag{14}$$

Здесь $\hat{M}$ выражается через киральные токи (то есть определяется внутренней геометрией мембраны). Например, для линейного случая

$$\hat{M} = \gamma\{\partial_\mu(\hat{a}^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta\hat{v}) + [\nabla_\mu\delta\hat{v}, \hat{a}^{\mu\nu}\hat{j}_\nu^{(0)}] + [\hat{j}_\mu^{(0)}, \hat{a}^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta\hat{v}]\}.$$

В (14) p – вспомогательная бозеевская переменная, а ψ и $\bar{\psi}$ – вспомогательные антикоммутирующие поля.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что действие (14) является суперсимметричным, то есть остается инвариантным при преобразовании:

$$\delta\hat{v} = \gamma(\bar{\epsilon}\psi + \bar{\psi}\epsilon), \quad \delta\psi = \epsilon(\partial_t - \hat{M})\hat{v}, \quad \delta\bar{\psi} = (\partial_t - \hat{M})\hat{v}\epsilon,$$

где ϵ, $\bar{\epsilon}$ – два инфинитезимальных антикоммутирующих поля.

Можно также убедиться, что действие (14) приводит к стандартному для релаксационной динамики соотношению:

$$-i\partial_t < \delta\hat{v}(0)\delta\hat{v}(t) > = < p(0)\delta\hat{v}(t) > - < p(t)\delta\hat{v}(0) >, \tag{15}$$

представляющему собой флуктуационно-диссипационную теорему, так как фигурирующие в правой части (15) корреляторы являются ничем иным, как обобщенными восприимчивостями или функциями отклика мембраны на возмущение формы [5] .

4. Описанная выше процедура сводит вычисление любых корреляторов, характеризующих свойства мембран, к стандартной задаче теории киральных полей с эффективным действием (14). В самых общих предположениях в рамках предложенного формализма установлена флуктуационно-диссипационная теорема (15) и доказана суперсимметрия эффективного действия.

Важно отметить, что фигурирующие в теории киральные токи сохраняют информацию о геометрии поверхности даже в таких на первый взгляд локальных характеристиках, как корреляционная функция малых флуктуаций $< \delta\hat{v}(1)\delta v(2) >$.

Теория кирального поля позволяет также вычислять такие нетривиальные характеристики поверхности, как корреляционные функции средней или гауссовской кривизны. Например, согласно (6) и (10),

$$< \delta k_h(1)\delta k_h(2) >=< \delta(\hat{j}^1_{31}(1) + \hat{j}^2_{32}(1))\delta(\hat{j}^1_{31}(2) + \hat{j}^2_{32}(2)) >=$$

$$=< (\nabla_1\delta\hat{v}^{31}(1) + \nabla_2\delta\hat{v}^{32}(1))(\nabla_1\delta v^{31}(2) + \nabla_2\delta v^{32}(2)) > . \qquad (16)$$

В плоском случае фигурирующие в (16) ковариантные производные сводятся к обычным и все вычисления легко могут быть доведены до конца. В фурье-представлении (ω – частота, q – волновой вектор) из (14) находим:

$$< \delta k_h(q,\omega)\delta k_h(0,0) >= \frac{\gamma q}{\omega^2 + \kappa^2\gamma^2 q^6}. \qquad (15)$$

Отметим, что это выражение согласуется с полученным в работе [5] для коррелятора смещений мембраны.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (93-02-2687), В.Г. благодарит фонд Сороса за финансовую поддержку.

---

1. S.A.Safran and N.A.Clark, Physics of Complex and Supermolecular Fluids (John Wiley and Sons, New York), 1987.
2. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, Современная геометрия, М.: Наука, 1979.
3. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B **275**, 135 (1986).
4. W.Helfrich, Z.Naturforsh **103**, 67 (1975).
5. E.I.Kats and V.V.Lebedev, Europhys. Lett. **22**, 469 (1993).
6. N.Sourlas, Physica D **15**, 115 (1985).