Письма в ЖЭТФ, том 77, вып. 9, с. 547 – 551 © 2003 г. 10 мая

Об асимптотике функции Гелл-Манна–Лоу в квантовой теории поля

Д. И. Казаков[+*1)], *В. С. Попов*[+1)]

[+]*Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия*

[*]*Объединенный институт ядерных исследований, 141980, Дубна, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2003 г.

Обсуждается задача о восстановлении функции Гелл-Манна–Лоу в квантовой теории поля по ее асимптотическому ряду, первые члены которого вычислены по теории возмущений (ТВ). И хотя математически однозначно это не осуществимо, при разумных предположениях об искомой функции оказывается возможным восстановить ее в некотором конечном интервале значений константы связи g, однако попытки определить поведение функции при $g \to \infty$ являются, на наш взгляд, необоснованными. Получены условия, при выполнении которых сумма расходящегося ряда ТВ может быстро убывать на бесконечности.

PACS: 03.70.+k, 11.10.Jj

1. Асимптотика функции Гелл-Манна–Лоу (ФГЛ) $\beta(g)$ при $g \to \infty$, определяющей поведение инвариантного заряда на малых расстояниях, представляет большой интерес в квантовой теории поля [1, 2]. Полученная в настоящее время информация о ФГЛ основана на теории возмущений (ТВ) по константе связи g, представляющей из себя асимптотический ряд

$$\beta(g) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n (-g)^n, \tag{1}$$

в котором известны нескольких первых коэффициентов β_n, вычисленных из диаграмм Фейнмана, а также асимптотика высших порядков $\bar{\beta}_n$ при $n \to \infty$, которую можно выбрать в виде

$$\bar{\beta}_n = \Gamma(n + 1/2) a^n n^b c, \tag{2}$$

где константы a, b и c находятся с помощью метода перевала [3].

Хотя имеющаяся информация, строго говоря, недостаточна для однозначного восстановления функции $\beta(g)$, первоначально казалось, что можно надеяться на то, что "сшивание" асимптотики $\bar{\beta}_n$ с точными значениями первых коэффициентов позволит восстановить ФГЛ с приемлемой точностью в широком интервале значений константы связи g и даже в пределе сильной связи $g \to \infty$.

Такие попытки были предприняты многими авторами с использованием различных методов суммирования расходящихся рядов ТВ, однако все они показали, что реализовать эту программу удается лишь в некотором ограниченном интервале значений g, но отнюдь не при $g \to \infty$ (см., например, работы [4 – 8] и дальнейшие ссылки в них). Этот вывод является общепринятым в литературе.

В опубликованном недавно цикле статей Суслова [9 – 13] сделана попытка провести ревизию этих результатов. Эти работы основываются на интерполяции коэффициентов ТВ β_n на промежуточные значения n: "Осмысленная постановка задачи возникает при приближенном задании всех β_n; тогда с некоторой точностью возможно восстановление $\beta(g)$. Поэтому необходимым этапом в решении задачи является проведение интерполяции коэффициентной функции; разумеется, это возможно лишь в предположении об ее аналитичности" (см. [9], стр.16). Далее проводится оптимизация интерполяционной процедуры по параметрам, которая,согласно [9], и определяет асимптотику искомой функции при $g \to \infty$. В результате применения этой процедуры в работах [9 – 12] находится асимптотика ФГЛ при $g \to \infty$ в ряде моделей квантовой теории поля, включая скалярную теорию $\phi^4_{(4)}$, КЭД и КХД. При этом делается утверждение об отсутствии нуля заряда в теории $\phi^4_{(4)}$ и в КЭД, что противоречит ранее сделанным утверждениям, основанным на суммировании асимптотических рядов ТВ, полученными другими авторами [6 – 8].

Как уже отмечалось в [14], принятый в [9 – 12] способ действий не является достаточно обоснованным, чтобы можно было делать сколько-нибудь определенные выводы. Более того, мы считаем, что разумно говорить о возможности восстановления функции по ее асимптотическому ряду (в предположении об аналитических свойствах функции) лишь в некоторой,

1)e-mail: kazakovd@thsun1.jinr.ru, markina@heron.itep.ru

расширенной по сравнению с обычной ТВ, области значений константы разложения g, но не при $g \to \infty$. Соответствующая аргументация изложена в нашей статье [14]. Появление новой работы Суслова [12], посвященной асимптотике ФГЛ в КХД, заставляет нас вернуться к этому вопросу.

2. Существенной особенностью КХД является то, что ряд ТВ (1) здесь знакопостоянный, а потому не суммируем методом Бореля, который лежит в основе практически всех подходов к суммированию асимптотических рядов. Чтобы избежать этой трудности, автор [12] делает в ряде ТВ замену $g \to -g$ и использует предположение о том, что асимптотики функции $\beta(g)$ при $g \to \pm\infty$ совпадают. Нет нужды говорить, что это предположение ничем не обосновано. Более того, физически ясно, что при изменении знака константы связи система полностью меняется: она перестает быть устойчивой и, попросту говоря, разваливается. Это обстоятельство определяет тот факт, что точка $g = 0$ является существенно особой точкой в комплексной плоскости и потому ряд ТВ является асимптотическим [15]. Как известно, тот факт, что ряд ТВ в КХД является знакопостоянным, свидетельствует о наличие вырождения вакуума в КХД и соответственно вкладов, пропорциональных экспоненте от обратной константы связи, которые не воспроизводятся теорией возмущений. В то же время, они не обязательно подавлены при большой константе связи. Поэтому такой способ действия, когда изменяется знак константы разложения, осуществляется переход к знакопеременному ряду, а затем ответ переносится на знакопостоянный ряд, представляется нам совершенно необоснованным и, вообще говоря, неверным.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть две функции $f_1(g)$ и $f_2(g)$ задаются формулами

$$f_1(g) \sim \frac{e^g \sum a_n g^n + e^{-g} \sum b_n g^n}{e^g + e^{-g}}, \tag{3}$$

$$f_2(g) \sim \frac{e^{-g} \sum a_n (-g)^n + e^g \sum b_n (-g)^n}{e^{-g} + e^g}, \tag{4}$$

причем эти ряды – асимптотические: $a_n \sim \Gamma(n+a)$, $b_n \sim \Gamma(n+b)$. Тогда функции $f_1(g)$ и $f_2(g)$ при $g \to 0$ имеют один и тот же асимптотический ряд, но только с измененным знаком константы разложения:

$$f_1(g) \sim \sum f_n g^n, \quad f_2(g) \sim \sum f_n (-g)^n,$$

где $f_n \simeq a_n + b_n$ при $n \gg 1$. Тем не менее, при $g \to \infty$ они могут иметь, вообще говоря, совершенно независимое поведение

$$f_1(g) \sim \sum a_n g^n \sim g^\alpha, \quad f_2(g) \sim \sum b_n (-g)^n \sim g^\beta. \tag{5}$$

Заметим при этом, что $f_2(g) \neq f_1(-g)$, как это может показаться, поскольку функция $f_1(-g)$ может и не существовать, а аналитическое продолжение с положительной полуоси на отрицательную обычно приводит к мнимой части [15], которая в $f_2(g)$ отсутствует.

Число подобных примеров нетрудно было бы увеличить. Асимптотика аналитической функции на бесконечности сама не является, как правило, аналитической функцией и терпит разрывы (явление Стокса), что хорошо известно, например, в теории специальных функций. Можно упомянуть и о квазиклассических волновых функциях, меняющих свой вид при переходе из классически разрешенной в подбарьерную область, а в комплексной области – при пересечении линии Стокса [16].

Таким образом, предположение об одинаковом поведении двух функций, хотя и задаваемых одним и тем же асимптотическим рядом с заменой $g \to -g$, отнюдь не самоочевидно и требует дополнительных аргументов, которые в [12] отсутствуют.

Но и после этого предположения применение метода автора к знакопеременному ряду дает, на наш взгляд, весьма неоднозначные результаты (см. рис.1 в [12]): наличие большого числа минимумов по χ^2 похоже на артефакт примененной процедуры при малом числе исходных членов ряда ТВ. К тому же, оценка коэффициента при ведущем члене асимптотики $\beta_\infty \sim 10^5$ с погрешностью в несколько порядков (фактически он меняется в пределах от 1 до 10^{10}, см. рис.2b в [12]), говорит о том, что эта асимптотика определена ненадежно.

3. Можно привести и другие аргументы против указанной в [12] асимптотики. Действительно, рассмотрим функцию, заданную асимптотическим рядом:

$$f(g) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n (-g)^n, \quad f_n \sim \Gamma(n+b) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Предположим[2], что ряд суммируем по Борелю, и применим борелевское преобразование

$$f(g)=\int_0^\infty dx\ e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{n!}(-gx)^n=\int_0^\infty dx\ e^{-x}B(gx), \tag{7}$$

где функция $B(x)$, задаваемая сходящимся рядом, называется трансформантой Бореля функции $f(g)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что функция $B(x)$ имеет степенное поведение $B(x)\sim x^\alpha$ при $x\to\infty$. Тогда, в зависимости от величины показателя степени α, получаем следующее поведение функции $f(g)$ при $g\to\infty$:

$$f(g)\sim\begin{cases}\Gamma(\alpha+1)g^\alpha & \alpha>-1,\\ \log g/g & \alpha=-1,\\ c_1\ g^{-1}, & \alpha<-1,\end{cases} \tag{8}$$

где $c_1=\int_0^\infty dxB(x)<\infty$. Последнее равенство легко получить, производя замену переменной $x=t/g$ в интеграле (7) и устремляя g к бесконечности.

На первый взгляд кажется, что функция $f(g)$ не может убывать быстрее, чем $1/g$. Однако это не так. В том случае, если для трансформанты Бореля N первых моментов обращаются в нуль[3]:

$$c_i=\int\limits_0^\infty dx\ x^{i-1}B(x)=0,\quad i=1,...,N, \tag{9}$$

то

$$f(g)\sim c_{N+1}\ g^{-(N+1)},\qquad g\to\infty \tag{10}$$

при условии, что $0<|c_{N+1}|<\infty$. В противном случае (то есть при $c_{N+1}=\infty$) показатель асимптотики функции $f(g)$ лежит между $-N$ и $-(N+1)$, либо $f(g)\sim\ln g/g^{N+1}$.

Следовательно, для того чтобы получить убывание порядка g^{-13} (см. [12]), требуется, чтобы 12 первых моментов функции $B(x)$ обратились в нуль. Учитывая, что в настоящее время известно лишь четыре члена ряда (1), такое утверждение представляется нам неоправданным.

Это же свойство функции можно увидеть и в случае модифицированного преобразования Бореля, используемого, в частности, в [12]:

$$f(g)=\int\limits_0^\infty dx\ e^{-x}x^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\Gamma(n+\beta)}(-gx)^n=$$
$$=\int\limits_0^\infty dx\ e^{-x}x^{\beta-1}B_\beta(gx),\quad \beta>1. \tag{11}$$

Асимптотика трансформанты Бореля в этом случае зависит от β. Так, если выбрать $\beta=b$ из (6), то $B_b(x)\sim c_1/x$ и

$$f(g)\sim c_1\Gamma(b-1)g^{-1},\quad \text{если}\ \ c_1\neq 0.$$

В противном случае, производя в интеграле (11) замену переменной $x\to x/g$, получаем[4]

$$f(g)=\frac{1}{g^\beta}\int\limits_0^\infty dx\ e^{-x/g}x^{\beta-1}B_\beta(x)\sim$$
$$\sim\frac{1}{g^\beta}\int\limits_0^\infty dx\ x^{\beta-1}B_\beta(x).\quad g\to\infty \tag{12}$$

Полагая здесь последовательно параметр $\beta=1,2,...,N$, видим, что для того, чтобы получить асимптотику $f(g)\sim 1/g^N$, необходимо, чтобы низшие моменты исчезали:

$$\int\limits_0^\infty dx\ x^{j-1}B_k(x)=0,\quad k\le j\le N-1;\qquad k=1,2,...,N-1. \tag{13}$$

Таким образом, быстрое убывание ФГЛ $\beta(g)\sim g^{-N}$ в принципе возможно, однако требует выполнения большого числа (N или $N^2/2$ для (9) и (13), соответственно) дополнительных условий, накладываемых на трансформанту Бореля. Очевидно, что знание 4 или 5 коэффициентов ТВ не может гарантировать выполнения этих условий. В то же время, как видно из приведенного анализа, асимптотика, растущая на бесконечности или убывающая не быстрее чем $1/g$, оказывается гораздо менее ограничительной.

4. Сделаем несколько замечаний по поводу "комментария" [13] к нашей статье [14]. Там приводится пример нуль-мерной модели $\phi^4_{(0)}$:

$$J(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\infty}^{\infty}d\phi\exp\{-\frac{1}{2}\phi^2-\frac{g}{4!}\phi^4\}\sim$$
$$\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-g)^k\frac{\Gamma(2k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)6^k}, \tag{14}$$

[2] Что вполне естественно, ибо без этого предположения ряды ТВ в квантовой механике и теории поля не являются строго определенными. Данное предположение используется и в работах [9–12].

[3] Отсюда также вытекает, что трансформанта Бореля должна осциллировать и иметь N нулей в интервале $0<x<\infty$.

[4] При этом предполагается, что последний интеграл сходится, что накладывает ограничения сверху на параметр β.

и утверждается, что использование всего лишь одного (!) коэффициента ряда ТВ позволяет, с помощью развитого в [9] метода, определить показатель асимптотики $J(g) \propto g^{\alpha}$ с 10%-й точностью: $-0.271 < \alpha < -0.218$ (точное значение $\alpha = -1/4$). Далее говорится, что "этот результат опровергает центральное утверждение работы [14] о необходимости большого числа коэффициентов разложения". Однако данный пример является весьма специфическим по следующим причинам:

а) уже первые коэффициенты ряда ТВ быстро выходят на свои асимптотические значения (см. столбец $D = 0$ в табл.1), что не наблюдается ни в квантовой механике (столбец $D = 1$), ни, тем более, во всех моделях теории поля (см., например, [7, 14] и табл.1);

б) если ввести в расчет 50 коэффициентов ряда ТВ вместо одного, то получается [9] значение показателя $\alpha = -0.235 \pm 0.025$, что практически не отличается от приведенного выше. Таким образом, учет большого числа коэффициентов ТВ – единственной новой информации об искомой функции – не повышает точность определения показателя α, что говорит о плохой сходимости используемого в [9] метода;

в) в модельном примере (14) отсутствует свойство, характерное для теории поля, а именно, зависимость отношения $\bar{\beta}_n/\beta_n$ от схемы перенормировки (MOM или $\overline{MS}$, см. табл.1), которая также говорит о том, что вычисленные коэффициенты β_n пока еще весьма далеки от асимптотики при $n \to \infty$.

Таким образом, нуль-мерная модель (14) является слишком упрощенной, чтобы на ее основе делать какие-либо общие выводы о числе коэффициентов ТВ, необходимых для восстановления ФГЛ.

5. Заметим, что в теории Янга-Миллса ситуация еще менее определенная, чем в скалярной теории поля. Здесь вычислены 4 коэффициента разложения ФГЛ [17], которые быстро возрастают по абсолютной величине: $\beta_2 = -11$, $\beta_3 = -102$, $\beta_4 = -1428.5$ и $\beta_5 \approx -29243$, и найден вид асимптотики при $n \to \infty$ [18, 13];

$$\beta_n \sim c\,\Gamma(n + 35/2). \tag{15}$$

Поскольку в данном случае коэффициент c неизвестен[5)], то для иллюстрации сходимости мы приводим в табл.2 отношения $\sigma_n = \rho_{n+1}/\rho_n$, где $\rho_n = \bar{\beta}_n/\beta_n$, для ангармонического осциллятора, теории $\phi^4_{(4)}$ и теории Янга–Миллса. Как следует из асимптотической формулы

$$\beta_n = \bar{\beta}_n(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots) \quad \text{при } n \to \infty, \tag{16}$$

отношения σ_n (не зависящие от c) ведут себя как

$$\sigma_n = 1 + \frac{c_1}{n^2} - \frac{c_1^2 + c_1 - 2c_2}{n^3} + O(1/n^4). \tag{17}$$

Отсюда следует, что если асимптотика коэффициентов β_n уже установилась, то σ_n с ростом $n \to \infty$ должны быстро приближаться к единице. Это действительно имеет место в случае ангармонического осциллятора; для скалярной теории поля сходимость σ_n к 1 намечается, однако в теории Янга-Миллса величины σ_n при $n \leq 4$ еще весьма далеки от единицы.

В данном случае параметры асимптотики (2) равны $a = 1$, $b = 17$. При этом ($n \ll b$) имеется резкая зависимость от формы записи асимптотических коэффициентов. Например,

$$\delta_n \equiv \frac{\Gamma(n + b + 1/2)}{\Gamma(n + 1/2)n^b} = 1 + \frac{b^2}{2n} + \frac{3b^4 - 4b^3 + b}{24n^2} + \ldots. \tag{18}$$

Таблица 1

Отношения $\rho_n = \bar{\beta}_n/\beta_n$ для модели $\phi^4_{(D)}$

n	$D = 0$	1	3	$4(MOM)$	$4(\overline{MS})$
2	1.0317	2.005	0.019	0.0978	0.0075
3	1.0210	1.897	0.085	0.659	0.0505
4	1.0157	1.718	0.166	1.072	0.097
5	1.0126	1.562	0.252	1.554	0.128
6	1.0104	1.443	0.322	–	0.139
7	1.0090	1.354	0.379	–	–
10	1.0063	1.203	–	–	–
20	1.0031	1.078			
30	1.0021	1.049			
50	1.0013	1.028			
75	1.0008	1.018			
a	2/3	3	0.1477	1	1
b	−1/2	0	4	4	4

Примечание. Случай $D = 0$ соответствует интегралу (14), $D = 1$ – энергии основного состояния одномерного ангармонического осциллятора [23], $D = 3$ и 4 – ФГЛ в скалярной теории поля. В последнем случае значения ρ_n приведены в двух схемах перенормировки – MOM или $\overline{MS}$. Последние две строки таблицы содержат значения параметров асимптотической формулы (2).

[5)] Как и в [12], мы рассматриваем случай $N_c = 3, N_f = 0$, то есть чистую глюодинамику без кварков.

Таблица 2

Отношения $\sigma_n = \rho_{n+1}/\rho_n$ для модели $\phi^4_{(D)}$ и для теории Янга–Миллса для $N_c = 3$ и $N_f = 0$

n	$D=0$	$D=1$ ϕ^4	$D=4$ ϕ^4 MOM	$D=4$ ϕ^4 ($\overline{MS}$)	YM ($\overline{MS}$)
2	0.9896	0.9459	6.738	6.733	177.089
3	0.9948	0.9063	1.627	1.921	24.935
4	0.9969	0.9090	1.450	1.320	7.810
5	0.9978	0.9235	–	1.086	–
10	0.99943	0.9769	–	–	–
50	0.99998	0.9994	–	–	–
75	0.99999	0.9998	–	–	–

В частности при $b = 17$ получаем $\delta_2 \sim 2\cdot 10^{11}$, $\delta_3 \sim 10^9$ и $\delta_5 \sim 6\cdot 10^6$. Отсюда очевидно, что асимптотика для β_n еще не наступила и степенные поправки по $1/n$, на использовании которых основан развитый в [9–12] алгоритм, сильно зависят от выбора формы записи этой асимптотики.

Поэтому мы остаемся при нашем прежнем мнении [14] о недостоверности высказанных в [9–12] утверждений об асимптотике ФГЛ при $g \to \infty$ в теории поля. Как показано в [14], для сколько-нибудь надежного восстановления ФГЛ в режиме сильной связи ($g \gg 1$, но не при $g \to \infty$) необходимо наличие большого числа членов ряда ТВ, которые уже выходят на свои асимптотические значения. При этом ситуация значительно осложняется, если в задаче имеется промежуточная асимптотика [14], либо если асимптотика содержит не только степень g, но и логарифм. В этих случаях наступление асимптотического режима сильно затягивается. Конкретный пример дает задача об атоме водорода в сильном электрическом [14] или магнитном [19] полях.

Заметим, что в то время как для знакопеременных рядов метод суммирования по Борелю и аналогичные ему методы приводят к весьма надежным результатам (см., например, вычисление критических индексов фазовых переходов второго рода [20, 21, 8]), в случае знакопостоянных рядов такой общепринятый метод отсутствует. Причина состоит в том, что наличие знакопостоянного ряда указывает на вырождение основного состояния и присутствие вкладов, не воспроизводимых по теории возмущений. Для восстановления функции здесь требуется дополнительная физическая информация, отсутствующая в пертурбативной теории поля. Хорошим примером является случай вырожденного ангармонического осциллятора, рассмотренный в [22].

Не хотелось бы, чтобы у читателей работ [9–12] создалось впечатление, будто вопрос об асимптотике ФГЛ в квантовой теории поля при $g \to \infty$ может найти решение на основе той или иной обработки нескольких первых членов ряда ТВ без привлечения дополнительной информации вне рамок ТВ, которая в настоящий момент отсутствует.

Авторы признательны А. В. Бакулеву, С. В. Михайлову, В. А. Новикову, В.Д.Муру и Д. В. Ширкову за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 01-02-16850, # 02-02-16889 и # 00-15-96691).

1. M. Gell-Mann and F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Глава IX, М.: Наука, 1984.
3. Л. Н. Липатов, Письма в ЖЭТФ **25**, 116 (1977); ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
4. V. S. Popov, V. L. Eletsky, and A. V. Turbiner, Phys. Lett. **72B**, 99 (1977); ЖЭТФ **74**, 445 (1978).
5. V. L. Eletsky and V. S. Popov, Phys. Lett. **77B**, 411 (1978).
6. Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).
7. D. I. Kazakov and D. V. Shirkov, Fortsch. der Phys. **28**, 465 (1980).
8. Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).
9. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000); ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
10. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).
11. И. М. Суслов, ЖЭТФ **117**, 659 (2000).
12. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **76**, 387 (2002).
13. И. М. Суслов, ЖЭТФ **122**, 696 (2002).
14. Д. И. Казаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **122**, 675 (2002).
15. F. J. Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).
16. J. Heading, *An Introduction to Phase Integral Methods*, Methuen, London, 1962; *Введение в метод фазового интеграла (Метод ВКБ)*, М.: Мир, 1965.
17. T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin, Phys. Lett. **B400**, 379 (1997).
18. E. B. Bogomolny and V. A. Fateev, Phys. Lett. **B71**, 93 (1977).
19. H. Hasegawa and R. E. Howard, J. Phys. Chem. Solids **21**, 179 (1961).
20. J. C. Le Guillou and J.Zinn-Justin, Phys. Rev. Lett. **39**, 95 (1977); Phys. Rev. **B21**, 3976 (1980); Ref.[22], Ch.25.
21. А. А. Владимиров, Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, ЖЭТФ **77**, 1035 (1979).
22. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Ch.40, Clarendon Press, Oxford, 1989, 1993.
23. C. M. Bender and T. T. Wu, Phys. Rev. **184**, 1231 (1969).