

Самоиндуцированная прозрачность циркулярно поляризованных фемтосекундных импульсов

А. А. Заболотский¹⁾

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 20 марта 2003 г.

В рамках новой интегрируемой системы эволюционных уравнений изучается явление самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде для оптических импульсов с длительностью, порядка периода осцилляции на энергетическом переходе. Приводится аппарат методов обратной задачи рассеяния, с помощью которого найдены солитонные решения модели. Проведено сравнение характеристик импульсов линейной и круговой поляризации.

PACS: 02.30.Ik, 42.50.Md, 42.65.Tg

Исследование процессов генерации и эволюции фемтосекундных оптических импульсов с характерной длительностью, близкой к периоду осцилляций $2\pi/\omega_0$, где ω_0 – частота энергетического перехода, привлекает постоянное внимание в связи с их приложениями в разных областях физики, см., например, обзоры [1, 2]. Область параметров таких импульсов ограничена условием отсутствия фотоионизации, то есть амплитуда поля не более $\sim 10^8 - 10^9$ Вт/см, а нижний предел длительности солитона $\sim 10^{-15} - 10^{-16}$ с [3, 4]. Условия применимости двухуровневой модели требуют достаточно большой изоляции рабочего перехода от остальных [5–8]. Эти условия улучшаются, если дипольный момент, отвечающий выбранному рабочему переходу, больше, чем дипольные моменты для близлежащих переходов [4].

При исследовании оптического фемтосекундного диапазона приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз световых полей в используемых для этой цели моделях неприменимо, поскольку длительность импульсов τ_p составляет несколько периодов осцилляций $\tau_p \sim \pi/\omega_0$. Такие импульсы будем называть почти предельно короткими импульсами (ППКИ). Упрощающее приближение $\tau_p \ll \pi/\omega_0$, отвечающее предельно коротким импульсам (ПКИ), которое применялось в ряде теоретических работ, например, в [5–8], не реалистично в оптическом диапазоне.

Наиболее детальную информацию об эволюции импульсов можно получить в рамках интегрируемых моделей методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [9]. Хорошо изучена интегрируемая модель – система уравнений Максвелла–Блоха (МБ), описывающая динамику квази-монохроматических импульсов [2]. Самоиндуцированная прозрачность в невы-

рожденной двухуровневой среде для ППКИ изучалась в работе [10], в которой показано, что исходная система уравнений приводится к редуцированным уравнениям МБ (РУМБ), к которой применим МОЗР. В работе [10] при выводе РУМБ вместо приближения медленных огибающих использовалось приближение малой плотности активной среды, что отвечает однонаправленному распространению волн. Однако все эти результаты относятся к случаю линейно поляризованного поля и не применимы для переходов с изменением момента на единицу и круговой поляризации ППКИ. Известное нам исключение – частное солитонное решение уравнений МБ для ПКИ с круговой поляризацией в двухуровневой невырожденной среде, найденное в работе [7]. В то же время изучение многосолитонной и иной автомодельной динамики ППКИ с круговой поляризацией имеет не меньшую актуальность. Очевидно, что условия применимости теории ППКИ намного мягче, чем в случае ПКИ. Более того, используя приведенные ниже результаты, нетрудно показать, что теория ППКИ включает в себя теорию ПКИ и теорию квази-монохроматических импульсов как предельные случаи.

В настоящей работе исследуется динамика взаимодействия фемтосекундных ППКИ с двухуровневой средой, состоящей из атомов с энергетическим σ переходом, то есть с изменением проекции магнитного момента на единицу ($\Delta m = \pm 1$). В этом случае дипольный матричный элемент является комплексным $d = d_x \mathbf{e}_x - id_y \mathbf{e}_y$ [11]. Здесь \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – единичные вектора декартовой системы координат, направленные по осям x и y . Импульс поля, взаимодействующий с таким переходом, имеет круговую поляризацию [11].

Соответствующая система уравнений Блоха для двухуровневой среды имеет вид

$$\partial S_x / \partial t = -\omega_0 S_y + \omega_0 f_y \mathcal{E}_y S_z, \quad (1)$$

¹⁾ e-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

$$\partial S_y / \partial t = \omega_0 S_x - \omega_0 f_x \mathcal{E}_x S_z, \quad (2)$$

$$\partial S_z / \partial t = \omega_0 (f_x \mathcal{E}_x S_y - f_y \mathcal{E}_y S_x), \quad (3)$$

здесь $f_{x(y)} = d_{x(y)} \hbar^{-1} \omega_0^{-1}$, ω_0 – частота перехода, \mathcal{E}_x и \mathcal{E}_y – соответствующие проекции поляризации вектора электрического поля. Компоненты вектора Блоха \mathbf{S} выражаются через элементы матрицы плотности среды $\hat{\rho}$: $S_z = \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{22})$, $S_x = \frac{1}{2}(\rho_{12} + \rho_{21})$, $S_y = \frac{i}{2}(\rho_{12} - \rho_{21})$, где $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1$.

Уравнения Максвелла для компонент поля получаем проекцией на соответствующую ось:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} = \frac{4\pi d_x n}{c^2} \frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi d_y n}{c^2} \frac{\partial^2 S_y}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где c – скорость света в среде с плотностью n .

Часто плотность активных атомов или молекул в реальных средах можно считать малой. При этом возможно применение известного из гидродинамики приближения однонаправленности распространения волн. В нелинейной оптике оно применялось в работе [10] при выводе редуцированных уравнений МБ. Малой плотности активных атомов отвечает приближенное формальное равенство $\partial_z \approx -c^{-1} \partial_t + \mathcal{O}(\epsilon)$, ϵ – малый параметр. Нормированная плотность двухуровневых атомов или молекул имеет тот же порядок малости, что и производная $\partial_z + c^{-1} \partial_t$ от компонент поляризации поля.

При выполнении условия однонаправленности распространения импульсов светового поля, система (1) – (5) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \partial S_x / \partial \tilde{\tau} &= -S_y + E_y S_z, \\ \partial S_y / \partial \tilde{\tau} &= S_x - E_x S_z, \\ \partial S_z / \partial \tilde{\tau} &= E_x S_y - E_y S_x, \\ \partial E_x / \partial \chi &= \frac{\partial S_x}{\partial \tilde{\tau}}, \\ \partial E_y / \partial \chi &= r^2 (\partial S_y / \partial \tilde{\tau}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $r = d_y / d_x$, $E_{x(y)} = f_{x(y)} \mathcal{E}_{x(y)}$, $\tilde{\tau} = \omega_0 (t - c^{-1} z)$, $\chi = z 2\pi n d_x^2 (c\hbar)^{-1}$.

Система (6) представляет собой новую интегрируемую систему уравнений. Ее представление Лакса $\forall r \in \mathbb{R}$ имеет следующий вид:

$$\partial_{\tilde{\tau}} \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \operatorname{cn} \operatorname{dn} & \operatorname{dn} E_x - i \operatorname{cn} E_y \\ -\operatorname{dn} E_x - i \operatorname{cn} E_y & i \operatorname{cn} \operatorname{dn} \end{pmatrix} \Phi, \quad (7)$$

$$\partial_{\chi} \Phi = \frac{1}{2 \operatorname{sn}^2} \begin{pmatrix} -i \operatorname{cn} \operatorname{dn} S_z & \operatorname{dn} S_x - i \operatorname{cn} S_y \\ -\operatorname{dn} S_x - i \operatorname{cn} S_y & i \operatorname{cn} \operatorname{dn} S_z \end{pmatrix} \Phi, \quad (8)$$

где $\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(\zeta, r)$, $\operatorname{cn} = \operatorname{cn}(\zeta, r) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2}$, $\operatorname{dn} = \operatorname{dn}(\zeta, r) = \sqrt{1 - r^2 \operatorname{sn}^2}$ – эллиптические функции Якоби, ζ – спектральный параметр и r – модуль функций Якоби.

Алгебраическая параметризация представления Лакса более предпочтительна для применения аппарата МОЗР. Ее удается найти для не перекрывающихся значений r : в изотропном случае $r^2 = 1$, в предельно анизотропном случае $r = 0$ и в промежуточном случае $r^2 \neq 0, 1$.

В изотропном случае спектральная проблема (7) имеет вид задачи Каупа-Ньюелла [12] со спектральным параметром $\lambda = \operatorname{cn} = \operatorname{dn}$, а при $r = 0$ – задачи Захарова-Шабата [9] с добавкой $-i\lambda E_y$, где E_y – произвольная функция τ .

Рассмотрим детальнее промежуточный случай. Для $r^2 \neq 1, r \neq 0$ возможна замена спектрального параметра: $\operatorname{cn}(\zeta, r) = \sqrt{1 - r^2} (\xi - \xi^{-1}) (2r)^{-1}$, после которой получаем следующее представление Лакса для системы (6):

$$\partial_{\tau} \Phi = \begin{pmatrix} -i \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) & \xi E^* + \frac{1}{\xi} E \\ -\xi E - \frac{1}{\xi} E^* & i \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \end{pmatrix} \Phi, \quad (9)$$

$$\partial_{\chi} \Phi = \frac{2r^2 (1 - r^2)^{3/2} \xi^2}{4r^2 - [(1 - r^2) \xi^2 - 1 - r^2]^2} \times \quad (10)$$

$$\times \begin{pmatrix} -i \frac{a}{r} \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) S_z & \xi S^* + \frac{1}{\xi} S \\ -\xi S - \frac{1}{\xi} S^* & i \frac{a}{r} \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) S_z \end{pmatrix} \Phi \equiv \hat{A} \Phi,$$

где ξ – новый спектральный параметр, $a = \sqrt{1 - r^2} / 2$, $E = r E_x / a + i E_y / a$ и $S = S_x + i S_y / r$, $\tau = a^2 \tilde{\tau} / (2r)$.

Спектральная задача (9) в теории интегрируемых систем возникает, по-видимому, впервые. Однако, аппарат МОЗР, ассоциированный с ней, имеет общие черты с развитым ранее аппаратом для (в разной степени) родственных спектральных проблем, связанных с уравнением Тирринга [13], нелинейным дифференциальным уравнением Шредингера [12] и с системой уравнений МБ, учитывающей нелинейный эффект Штарка [14]. Поэтому приведем лишь основные элементы аппарата МОЗР для достаточно быстро исчезающего на бесконечностях потенциала E .

Решения (9) обладают следующими свойствами симметрии:

$$\Phi = \hat{M} \Phi(\xi^*)^* \hat{M}^{-1}, \quad (11)$$

где

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\Phi(\xi^*)^* = \Phi(\xi^{-1}). \quad (12)$$

Стандартным способом вводим функции Йоста Φ^\pm – решения (9) с асимптотиками

$$\Phi^\pm = \exp(-i\omega\sigma_3\tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (13)$$

здесь $\omega = \xi^2 - \xi^{-2}$. Свойство симметрии (11) отвечает следующей матричной форме функций Йоста:

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} \psi_1^\pm & -\psi_2^{\pm*} \\ \psi_2^\pm & \psi_1^{\pm*} \end{pmatrix}.$$

Эти решения связаны матрицей рассеяния \widehat{T} :

$$\Phi^- = \Phi^+ \widehat{T}. \quad (14)$$

Зависимость данных рассеяния от χ дается формулой

$$\partial_\chi \widehat{T} = -\widehat{T} e^{-i\sigma_3\omega\tau} \widehat{A}(\tau = -\infty) e^{i\sigma_3\omega\tau} + e^{-i\sigma_3\omega\tau} \widehat{A}(\tau = \infty) e^{i\sigma_3\omega\tau} \widehat{T}. \quad (15)$$

Представим функцию Йоста в виде

$$\begin{aligned} \Phi^+(\tau) &= e^{-i\widehat{\sigma}_3[\omega\tau + \mu(\tau)]} + \\ &+ \int_\tau^\infty \left(\begin{aligned} &[Q_1(\tau, s) + \xi^{-2}Q_2(\tau, s)] e^{-i\mu(\tau)} \\ &[\xi K_1(\tau, s) + \xi^{-1}\widetilde{K}_2(\tau, s)] e^{i\mu(\tau)} \\ &- [\xi\widetilde{K}_1(\tau, s) + \xi^{-1}K_2(\tau, s)] e^{-i\mu(\tau)} \\ &[Q_1^*(\tau, s) + \xi^{-2}Q_2^*(\tau, s)] e^{i\mu(\tau)} \end{aligned} \right) e^{-i\widehat{\sigma}_3\omega s} ds. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь $\widehat{\sigma}_3$ – матрица Паули и $\mu(\tau)$ – функция, которая будет определена ниже. Из свойств симметрии функций Йоста следует, что $\widetilde{K}_{1,2} = K_{1,2}^*$ и $\mu^* = \mu$.

Ядра $K_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ должны удовлетворять условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K_{1,2}(\tau, s) = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Q_{1,2}(\tau, s) = 0. \quad (18)$$

Подставив выражение (16) в (9), находим связь потенциала и ядер

$$E(\tau, \chi) = -2K_2(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu), \quad (19)$$

$$E^*(\tau, \chi) = -2K_1^*(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu). \quad (20)$$

Подставляем значения компонент функции Φ в (14), интегрируем полученные выражения по ξ с весами

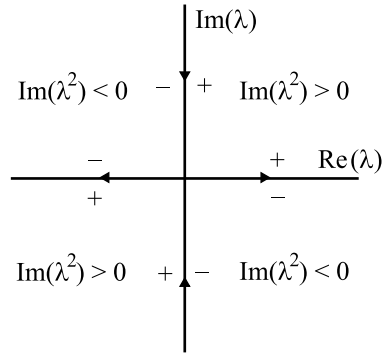


Рис.1. Контур интегрирования Γ

$\xi^m \exp(i\omega\tau)$, $m = 0, -2$ вдоль контура Γ , показанного на рис.1. Используя следующие равенства:

$$\int_\Gamma \xi^m \exp(i\omega\tau) d\xi = 4\pi\delta(\tau), \quad m = 1, -3 \quad (21)$$

$$\int_\Gamma \xi^m \exp(i\omega\tau) d\xi = 0, \quad m = -1/2, 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (22)$$

находим уравнения Марченко:

$$\begin{aligned} K_1^*(\tau, y) &= F_0(\tau + y) + \int_\tau^\infty [Q_1(\tau, s)F_0(s + y) + \\ &+ Q_2(\tau, s)F_{-1}(s + y)] ds, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2(\tau, y) &= F_{-1}(\tau + y) + \int_\tau^\infty [Q_1(\tau, s)F_{-1}(s + y) + \\ &+ Q_2(\tau, s)F_{-2}(s + y)] ds, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1^*(\tau, y) &= - \int_\tau^\infty [K_1(\tau, s)F_1(s + y) + \\ &+ K_2^*(\tau, s)F_0(s + y)] ds, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2^*(\tau, y) &= - \int_\tau^\infty [K_1(\tau, s)F_0(s + y) + \\ &+ K_2^*(\tau, s)F_{-1}(s + y)] ds, \quad (26) \end{aligned}$$

где $y \geq \tau$. Ядро F имеет вид

$$F_m(y, \chi) = \int_{-\infty}^\infty \frac{b(\chi)}{a(\chi)} \frac{\xi^{2m} e^{-i\omega y}}{2\pi} d\xi - i \sum_k \frac{\xi^{2m} c_k(\chi) e^{-i\omega y}}{a'(\xi_k, \chi)}, \quad (27)$$

где $\omega_k = \xi_k^2 - \xi_k^{-2}$.

Простейшее солитонное решение отвечает единственному полюсу ξ_1 , лежащему в первом (третьем) квадранте, и условиям $E(\pm\infty, \chi) = 0$, $S_z(0, \chi) = -1$.

Ввиду свойства симметрии (12) значения ξ_1 ограничены условием $|\xi_1| = 1$. Положим $\xi_1 = \exp(i\phi_1)$, где $\phi_1 \in \mathbb{R}$. Однополюсное решение, которое находим, решая систему уравнений (15),(23) – (27), имеет вид

$$E(\tau, \chi) = \frac{-2|\sin \phi_1| \exp[i\gamma_1 - i\phi_1/2]}{|\cosh [4 \sin \phi_1 \theta + \gamma_2 - i\phi_1/2]|}, \quad (28)$$

где

$$\theta = \tau - \frac{a\chi}{2\sqrt{r^2 \cos^2(\phi_1/2) + \sin^2(\phi_1/2)}},$$

$$\gamma_1 = \arg \frac{-ic_1}{2a'(\xi_1)}, \quad \gamma_2 = \ln \left| \frac{c_1}{2a'(\xi_1)} \right|.$$

Отметим, что для двухполюсного решения, отвечающего, например, значениям спектрального параметра $\xi_1^2 = \eta$ и $\xi_2^2 = -\eta^{-1}$, ограничения на область значений $\xi_{1,2}$ не возникают.

При больших (или малых) ξ возможен переход к изотропному случаю, указанному выше. Рассмотрим предельный переход $r \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow \infty$, при котором $\sqrt{1-r^2}(\xi - \xi^{-1})(2r)^{-1} \rightarrow \lambda$ и $\xi E^* + \xi^{-1}E \rightarrow \lambda(E_x - iE_y)$. При этом в представлении Лакса (7),(8) следует заменить $\text{dn}, \text{cn} \rightarrow \lambda$, $\text{sn}^2 \rightarrow 1 - \lambda^2$. Уравнения аппарата МОЗР, приведенные выше (кроме свойства симметрии (12)), остаются после следующей модификации в силе. В (16) не учитываем члены со степенями ξ^{-m} , $m = 1, 2$. Из системы уравнений Марченко (23) – (26) остаются уравнения (23) и (25) без последних подынтегральных членов в правых частях.

Вместо условий связи (19), (20) теперь имеем

$$\partial_\tau \mu(\tau, \chi) = 2|K_1(\tau, \tau, \chi)|^2, \quad (29)$$

$$\tilde{E}^*(\tau, \chi) = -2K_1^*(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu). \quad (30)$$

где $\tilde{E}^* = E_x - iE_y$.

Односолитонное решение, отвечающее одному собственному значению $\lambda_1 = |\lambda_1|e^{i\alpha_1}$, лежащему в первом (третьем) квадранте плоскости λ , имеет вид

$$\tilde{E}_c(\tau, \chi) = \frac{-2 \text{Im} \lambda_1^2 e^{i(\text{Re} \lambda_1^2 \tau + W\chi + \gamma_1 - \alpha_1 - 2\mu)}}{|\lambda_1| \cosh [\text{Im} \lambda_1^2 (\tau - \chi/V) + \beta_1 + i\alpha_1]}, \quad (31)$$

где

$$V = (1 - \text{Re} \lambda_1^2)^2 + (\text{Im} \lambda_1^2)^2,$$

$$W = [\text{Re} \lambda_1^2 (1 - \text{Re} \lambda_1^2) - (\text{Im} \lambda_1^2)^2] V^{-1},$$

$$\beta_1 = \ln |(\lambda_1 c_1) / (4 \text{Im} \lambda_1^2 a'(\lambda_1))|,$$

$$\mu = -\arctan \left\{ \text{ctg} \alpha_1 \text{cth} \left[\text{Im} \lambda_1^2 \left(\tau - \frac{\chi}{V} \right) + \beta_1 \right] \right\} \times \frac{2 \text{Im} \lambda_1^2}{|\lambda_1^2| \sin(2\alpha_1)}.$$

Сравним полученное солитонное решение для циркулярно поляризованной волны (31) с известным решением для аналогичного солитона линейно поляризованной электромагнитной волны, распространяющегося в двухуровневой среде. Такое солитонное решение РУМБ, найденное, например, в [10], имеет вид

$$\tilde{E}_l(\tau, z) = \frac{2 \text{Im} \eta_1}{\cosh [\text{Im} \eta_1 (\tau - \tau_0 - z/V_0)]}, \quad (32)$$

где $(\text{Im} \eta_1)^{-1}$ – длительность солитона, $(c^{-1} + V_0^{-1})^{-1}$ – его групповая скорость и τ_0 – положение в начальный момент. Выберем для сравнения равные длительности солитонов (31) и (32): $\eta_1 = \lambda_1^2$ и $|\lambda_1| = 1$. Анализ полученного решения показал, что в случае $\text{Im} \lambda_1^2 \ll \text{Re} \lambda_1^2$ амплитуды солитонов близки. При $\text{Im} \lambda_1^2 = \text{Re} \lambda_1^2$ максимальная интенсивность I_c солитона (31) в два раза больше максимальной интенсивности I_l солитона (32). При $\text{Im} \lambda_1^2 \gg \text{Re} \lambda_1^2$ найдено, что $I_c \gg I_l$, см. рис.2.

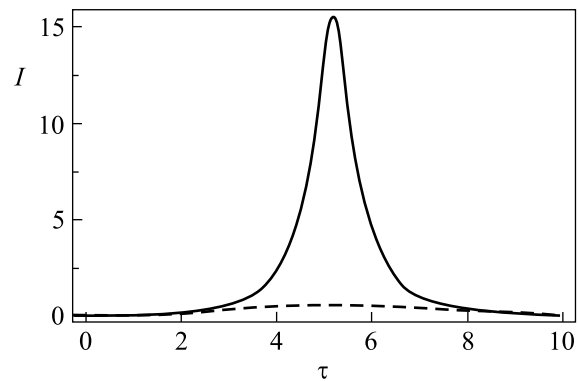


Рис.2. Зависимость интенсивности солитонов $I = |E|^2$ от τ для циркулярно- (сплошная линия) и линейно- (пунктирная линия) поляризованного света $\lambda_1 = (0.2 + i)/1.04$

Таким образом обнаружено, что применение σ переходов и электромагнитных импульсов с круговой поляризацией позволяет генерировать импульсы с намного большей интенсивностью, при одинаковой длительности по сравнению с линейной поляризацией. Справедливо и обратное: импульсы круговой поляризации имеют меньшую длительность, чем импульсы линейной поляризации при равных максимальных амплитудах. Для получения импульсов с такими характеристиками необходимо подбирать фазу начального импульса, близкую к $\alpha_1 \approx \pi/2$. Требуемые параметры инжектируемого в среду импульса нетрудно определить, решая задачу (9).

Условия наблюдения ППКИ, накладываемые, например, на интенсивности импульсов, по меньшей мере на два порядка слабее, чем требуемые для на-

блюдения ПКИ [5–7]. Из-за более узкого спектра ПКИ требования на применимость двухуровневой среды также значительно мягче, чем для ПКИ.

Отметим в заключение, что новая интегрируемая модель и предложенный выше аппарат МОЗР имеют непосредственное применение для описания поперечных акустических волн в парамагнитном кристалле с примесными ионами со спином $1/2$, а также при описании динамики импульсов поперечного магнитного поля в кристаллическом магнетике с малой плотностью спинов и с ромбической симметрией.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 03-02-16297 и Междисциплинарным интеграционным проектом фундаментальных исследований СО РАН, “Теоретические и экспериментальные исследования получения наноразмерных регулярных структур (фотонных кристаллов), их функциональных и нелинейно-оптических свойств”.

1. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).

2. А. И. Маймистов, *Квантовая электр.* **30**, 287 (2000).
3. D. You, D. R. Dykaar, and P. H. Bucksbaum, *Optics Lett.* **18**, 290 (1993).
4. M. Wittmann, A. Nazarkin, and G. Korn, *Optics Lett.* **26**, 5 (2001).
5. Е. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин и др., *Письма в ЖЭТФ* **47**, 523 (1988).
6. Е. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
7. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, L7 (1994).
8. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **114**, 1393 (1998).
9. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, М.: Наука, 1980.
10. J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1237 (1973).
11. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical resonances and two-level atoms*, New York, Wiley & Sons, 1975.
12. D. J. Kaup and A. C. Newell, *J. Math. Phys.* **19**, 798 (1978).
13. Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов, *ТМФ* **30**, 303 (1977).
14. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **107**, 1100 (1995).