Письма в ЖЭТФ, том 77, вып. 9, с. 563 – 567

Усиление двухмодового сжатого света в состоянии Эйнштейна–Подольского–Розена

В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко

Лаборатория квантовой информации и вычислений, государственного университета аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 3 апреля 2003 г.

Рассмотрены две схемы для усиления двухмодового сжатого света в состоянии Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР), где наличие интегралов движения приводит к сохранению квантовых корреляций, в то время как мощность каждой волны может возрастать. Одна из схем основана на параметрическом трехфотонном взаимодействии в прозрачной нелинейной среде, вторая представляет вариант резонансного взаимодействия с атомным ансамблем.

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Gy

1. Введение. Оптической реализацией перепутанных состояний – основного ресурса квантовых информационных процессов, являются неклассические состояния света. Так, непрерывным аналогом состояния Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) пары [1] выступает двухмодовый сжатый свет, хорошо известный в квантовой оптике. Этот свет обладает квантовой корреляцией, которая легко разрушается при взаимодействиях, поэтому лишь некоторые преобразования могут сохранять его свойства. Так, сложной оказывается задача усиления неклассического света. Было показано, что обычная линейная усиливающая среда разрушает сжатое состояние из-за своих шумов, происходящих от спонтанного излучения [2, 3]. Такая же ситуация возникает при нелинейном усилении [4], равно как в случае распространения света через усиливающий коммуникационный канал [5]. Вместе с тем неклассический свет можно преобразовать с одной частоты на другую [6].

Цель данной работы – рассмотреть возможность усиления двухмодового сжатого света в ЭПР состоянии непрерывных переменных (continuous variable EPR state), который может быть получен с помощью параметрического генератора (Optical Parametric Oscilltor). Именно такой свет использовался в качестве квантового канала для телепортации когерентного состояния электромагнитного поля [7], для целей плотного кодирования [8] и спектроскопии в неклассическом свете [9]. Заметим, что в этих экспериментах мощность света была невелика. Основная идея усиления основана на наличии некоторых интегралов движения при взаимодействиях света со средой. Поскольку перепутанные или сжатые состояния могут быть собственными состояниями операторов, которые в свою очередь являются интегралами движения, то степень перепутанности или характер квантовой корреляции будут сохраняться, в то время как мощность света может увеличиваться. Пример взаимодействия, где сохраняются некоторые свойства сжатого света при усилении приведен в [10]. В [11] рассмотрен специальный термостат с коллективным распадом, который приводит к возникновению перепутанного состояния у атомов и, следовательно, может его сохранять. Вместе с тем при распространении света в квантовом канале с фазовочувствительным окружением, где в роли термостата выступает сжатый вакуум, деградация перепутанных состояний не замедляется [12].

В этой работе мы рассматриваем две схемы для усиления двухмодового сжатого света в перепутанном состоянии. Первая содержит прозрачную нелинейную среду с трехфотонным параметрическим взаимодействием, вторая основана на резонансном взаимодействии с атомным ансамблем. Особенностью этих схем является то, что они не создают перепутанного состояния, а сохраняют степень корреляции или перепутанность между модами, при этом мощность света может увеличиваться. Это есть прямое следствие наличия интегралов движения, благодаря которым решаются две задачи: сохраняются интересующие нас свойства и возникает интересующий нас процесс усиления. В работе используется временное описание эволюции, однако представленный подход может быть непосредственно трансформирован на процесс распространения. Для этого, например, можно воспользоваться квантовым формализмом теории переноса, представленным в [13], где, в частности, обсуждается, какие сведения можно получить из интегралов движения в многофотонных параметрических процессах. Данная работа организована следующим образом. Вначале обсуждается определение перепутанного состояния типа ЭПР пары для случая непрерывных переменных и его реализация с помощью двухмодового сжатого света, затем рассмотрены схемы с параметрическим взаимодействием в прозрачной среде и резонансным взаимодействием с атомным ансамблем.

2. Сжатый двухмодовый свет и перепутанное состояние. Для случая непрерывных переменных состояние типа ЭПР пары может быть введено двумя способами. Во-первых, его определяют как собственную функцию операторов суммарного импульса P и разностной координаты Q двух подсистем. Во-вторых, оно задается через свойства гейзенберговских операторов P и Q на выходе оптического параметрического генератора. При оптической реализации, где важны измеряемые в опыте величины, которыми, в частности, являются дисперсии наблюдаемых P и Q, оба подхода приводят к двухмодовому сжатому свету.

Операторы разностной координаты и суммарного импульса двух подсистем или двух частиц могут быть введены следующим образом:

$$Q = x_1 - \epsilon x_2, \quad P = p_1 + (1/\epsilon)p_2, \tag{1}$$

где x_m, p_m – канонические операторы координаты и импульса частицы $m = 1, 2, \epsilon$ – вещественное число. Наблюдаемые P и Q имеют общий полный набор собственных функций, известных как непрерывные состояния Бэлла [14]:

$$Q|\Psi_{PQ}\rangle = \mathcal{Q}|\Psi_{PQ}\rangle, \quad P|\Psi_{PQ}\rangle = \mathcal{P}|\Psi_{PQ}\rangle. \tag{2}$$

Если собственные числа равны нулю, то возникает непрерывный аналог максимально перепутанной ЭПР пары

$$|\Psi_{00}\rangle = |EPR\rangle. \tag{3}$$

Простая модель невырожденного параметрического генератора может быть описана с помощью эффективного гамильтониана $H = i\chi\hbar(a_1^\dagger a_2^\dagger - \text{h.c.})$, где χ – константа взаимодействия, пропорциональная квадратичной восприимчивости нелинейной среды, $a_m^\dagger$, a_m – операторы рождения и уничтожения мод $m = 1, 2$. В представлении Гейзенберга решение задачи для операторов $Z = P, Q$ имеет вид $Z = Z_0 \exp(-\epsilon r)$, где $\epsilon = \pm 1$, Z_0 – операторы на входе параметрического генератора, r – параметр сжатия. Если $r \to \infty$, то независимо от состояния генерируемых полей на входе, возникает ЭПР пара, которую можно определить на основании свойств операторов P и Q, для которых

$$Q \to 0, \;\; P \to 0. \tag{4}$$

Это состояние отвечает состоянию идеальной ЭПР пары, которое, однако, не реализуется экспериментально, поскольку r принимает некоторое фиксированное значение. В качестве другой модели источника перепутанной фотонной пары с аналогичными свойствами [15] можно использовать и два независимых источника, генерирующие квадратурно-сжатые независимые поля в процессе вырожденного параметрического преобразования, описываемого гамильтонианом $H = ik\hbar(a^{\dagger 2} - \text{h.c.})$. Состояние ЭПР возникает при последующем смешении таких световых полей на полупрозрачной непоглощающей пластине.

В квантовой оптике для описания света часто используется квадратурный оператор

$$X(\theta) = a^\dagger \exp(i\theta) + \text{h.c.} = 2(x\cos\theta + p\sin\theta), \tag{5}$$

где $a = x + ip$ – фотонный оператор уничтожения $[a; a^\dagger] = 1$, $[x; p] = i/2$. Свойства света могут быть получены из набора его корреляционных функций, в частности, из дисперсий квадратурного оператора $\langle(\Delta X)^2\rangle = \langle X^2\rangle$, измерение которых хорошо известно. Так, например, для когерентного состояния, которое минимизирует соотношение неопределенностей и выступает границей между классическими и неклассическими или квантовыми состояниями электромагнитного поля, $\langle(\Delta X)^2\rangle = 1$. Если, однако,

$$\langle(\Delta X(\theta))^2\rangle < 1, \tag{6}$$

то свет называют сжатым, а более точно такое состояние будет сжатым по координате или амплитуде, если $\theta = 0$, и сжатым по импульсу или фазе, если $\theta = \pi/2$. Предельному сжатию отвечает случай $\langle(\Delta X(\theta))^2\rangle = 0$. Заметим, что термины амплитуда и фаза возникают при рассмотрении свойств света с использованием фазового пространства, а вовсе не наблюдаемых типа амплитуда и фаза.

Введенный квадратурный оператор измеряется в схеме гетеродинного приема. В ней исследуемый сигнал смешивается с опорной волной на полупрозрачном зеркале с последующим измерением разностного фототока i от двух детекторов. Если считать, что квантовая эффективность обоих детекторов одинакова и равна 1, то спектр фототока или спектр шумов света определяется дисперсией квадратурного оператора

$$i^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle i(t)i(t+\tau)\rangle \exp(i\tau\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle X(t)X(t+\tau)\rangle \exp(i\tau\omega). \tag{7}$$

Заметим, что большое число моделей в квантовой оптике приводит к выражению для спектра шума в низкочастотной области, которое имеет вид

$$i^2(\omega \approx 0) = 1 + \langle : (\Delta X(\theta))^2 : \rangle, \tag{8}$$

где 1 отвечает уровню дробового шума или стандартному квантовому пределу, а двоеточие обозначает нормальное упорядочение операторов. Как следует из (6) и (8), сжатый свет имеет уровень шумов ниже дробового, который может быть в принципе подавлен почти полностью. Это одно из известных основных свойств этого состояния, которое делает его привлекательным, например, для задач прецезионного измерения.

Операторы суммарного импульса P и разностной координаты Q, определенные согласно (1), могут быть записаны через квадратурные операторы X_m двух мод $m = 1, 2$ электромагнитного поля:

$$\begin{gathered} Q = (1/2)[X_1(0) - \epsilon X_2(0)], \\ P = (1/2)[X_1(\pi/2) + (1/\epsilon) X_2(\pi/2)]. \end{gathered} \tag{9}$$

Обе наблюдаемые величины P и Q могут быть измерены в схеме, которая содержит полупрозрачное зеркало, смешивающее две моды, и последующее измерение канонического импульса и координаты двух выходящих пучков [7]. Как следует из (2) и (4), дисперсии наблюдаемых P и Q равны нулю, поэтому, согласно (6) и (8), непрерывные состояния Белла $|\Psi_{PQ}\rangle$ или состояния на выходе параметрического генератора оказываются сжатыми по разностной координате и суммарному импульсу с подавленными дробовыми шумами. Таким образом, сжатые состояния оказываются перепутанными, однако сжатие или наличие неклассического состояния полей является лишь необходимым условием. Вместе с тем, если состояние оказалось перепутанным, то в качестве меры перепутывания можно выбрать уровень подавления дробового шума.

3. Усиление в прозрачной среде с квадратичной нелинейностью. Пусть взаимодействие двух мод описывается гамильтонианом

$$V = \hbar k P Q, \tag{10}$$

где k – вещественная константа связи. Тогда операторы суммарного импульса P и разностной координаты Q, равно как и любые функции от них, являются интегралами движения. Пусть исходное состояние света задано ЭПР парой, которую можно получить с помощью параметрического генератора. Для нее $Z(t = 0) = Z_0 \exp(-\epsilon r)$, $Z = P, Q$ и поэтому $Z(t) = Z(0)$. Вместе с тем любые собственные функции интегралов движения $Z = P, Q$ также не изменяются и, в частности, сохраняются перепутанные состояния $|\Psi_{PQ}\rangle$, поскольку их эволюция сводится лишь к умножению на фазовый множитель:

$$\exp(-i\hbar^{-1} V T)|\Psi_{PQ}\rangle = \exp(-ik\mathcal{P}\mathcal{Q}t)|\Psi_{PQ}\rangle.$$

Сохранение квантовой корреляции вовсе не препятствует тому, чтобы состояние каждой моды изменялось в процессе взаимодействия. Чтобы описать эволюцию мод, воспользуемся гейзенберговскими уравнениями движения, которые для операторов импульсов и координат в представлении взаимодействия имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} x_1 = \frac{1}{2} k Q, \quad \frac{\partial}{\partial t} p_1 = \frac{1}{2} k P,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x_2 = \frac{1}{2\epsilon} k Q, \quad \frac{\partial}{\partial t} p_2 = \frac{\epsilon}{2} k P.$$

Отсюда нетрудно получить уравнения для операторов числа фотонов ($n_m = x_m^2 + p_m^2 - 1/2$) в волнах:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1 = k(Q x_1 - P p_1), \quad \frac{\partial}{\partial t} n_2 = k\left(Q \frac{x_2}{\epsilon} + \epsilon P p_2\right). \tag{11}$$

Решения (11) имеют вид

$$n_1(t) = n_{10} + \mu^2 (Q^2 + P^2) + 2\mu (Q x_{10} + P p_{10}),$$

$$n_2(t) = n_{20} + \mu^2 \left(\frac{Q^2}{\epsilon^2} + P^2 \epsilon^2\right) + 2\mu \left(Q \frac{x^2}{\epsilon} + P p_{20} \epsilon\right),$$

где $Y_{m0}, m = 1, 2$ – операторы в начальный момент времени, $\mu = kt/2$.

Если на входе присутствует максимально сжатое и перепутанное состояние, определенное согласно (4), то усиления не возникает. В остальных случаях может происходить усиление, пропорциональное μ^2. Продемонстрируем это в примерах моделей источников на основе ОРО из исходно вакуумных состояний. В условиях реальных экспериментов параметры сжатия параметрического источника принимают некоторое конечное значение r. Тогда средние числа фотонов в перепутанных волнах, падающих на усиливаемую среду $\langle n_{m0} \rangle = \mathrm{sh}^2 r$, а дисперсии координаты и импульса определяются соотношениями $\langle (\Delta Q(0))^2 \rangle = \langle (\Delta P(0))^2 \rangle = 1/2 \exp(-2r)$. Выражение для коэффициента усиления $K = (\langle n_m(t) \rangle / \langle n_{m0} \rangle)$ имеет вид $K = 1 + 4\mu^2 (\exp(2r) - 1)^{-2}$. Для идеального случая $r \to \infty$ и никакого усиления не происходит, $K \to 1$. Для этого случая среда играет роль идеального квантового повторителя, что может быть важным для обеспечения свойств ЭПР пары при распространении, поскольку взаимодействие с окружением приводит к ее разрушению. В реальной ситуации значение r фиксировано и коэффициент усиления тем больше, чем меньше значение параметра сжатия. При $r \to 0$ усилитель преобразуется в генератор поля из вакуумного состояния, который, однако, не генерирует ЭПР пары или двухмодового света, сжатого по P и Q. Значения дисперсий вакуумного входного состояния $\langle(\Delta P)^2\rangle = \langle(\Delta Q)^2\rangle = 1/2$ будут сохраняться в последующий момент времени, хотя средние числа фотонов в модах $\langle n_m(t)\rangle = \mu^2 \neq 0$.

Возникает, однако, вопрос, описывает ли гамильтониан (10) какие-нибудь реальные процессы? Для ответа запишем гамильтониан через операторы рождения и уничтожения мод:

$$V = i\frac{k}{4}[a_1^{\dagger 2} - a_1^2 - a_2^{\dagger 2} + a_2^2 + (1/\epsilon)(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)(1-\epsilon^2) + (1/\epsilon)(a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2)(1+\epsilon^2)]. \tag{12}$$

Пусть $\epsilon = \pm 1$, тогда видно, что (12) описывает трехфотонные параметрические взаимодействия в прозрачной среде с квадратичной нелинейностью. Действительно, здесь представлено три процесса преобразования частоты, два из которых являются делением частоты в классическом поле накачки $\Omega_m = \omega_m + \omega_m$ и один процесс типа преобразования частоты вверх $\Omega + \omega_1 = \omega_2$, где Ω_m, Ω – частоты классических волн накачки, ω_m – частоты мод $m = 1, 2$. Чтобы эти три взаимодействия проходили эффективно, требуется выполнение условий фазового синхронизма, которые могут быть обеспечены в нелинейных периодических средах, обсуждавшихся в [16]. Оценку интенсивности классического поля, используемого в качестве накачки рассматриваемых процессов, проведем, следуя работе [17]. В реальных экспериментах параметр сжатия соответствует значению $\exp(2r) \approx 5$. Пусть коэффициент усиления $K = 10$, в этих условиях безразмерный параметр $\mu = 6$. Это может достигаться в кристаллах с длиной несколько сантиметров, для длины волны усиливаемого света, например, $\lambda = 0.5$ мкм при мощности волны накачки $I \approx 10^4$ Вт/см^2, что вполне экспериментально реализуемо.

4. Усиление в резонансной среде. Рассмотрим резонансное взаимодействие N одинаковых двухуровневых атомов с электромагнитным полем, которое описывается эффективным гамильтонианом

$$H = i\hbar\vartheta, \quad \vartheta = S_{10}B - S_{01}B^\dagger. \tag{13}$$

Здесь атомные операторы определены соотношением

$$S_{xy} = \sum_a s_{xy}(a), \quad s_{xy}(a) = |x\rangle_a\langle y|, \quad x, y = 0, 1,$$

$|0\rangle_a$, $|1\rangle_a$ – нижний основной и возбужденный уровни атома a, а поле представлено операторами B, $B^\dagger$.

Пусть с атомным переходом взаимодействуют три моды, $m = 1, 2, 3$, с частотами ω_m, которые описываются операторами a_m и связаны с частотой атомного перехода ω_0 соотношениями $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_3 - \omega_2 = \omega_0$. Для этого случая $B = ga_1 - fa_3 a_2^\dagger$, где g, f – константы связи. Пусть мода на частоте ω_3 будет классической, тогда $B = g(a_1 + \nu a_2^\dagger)$, где $\nu = fa_3/g$. Полагая $\nu = \epsilon = \pm 1$, найдем

$$B = g(a_1 - \epsilon a_2^\dagger) = Q + iP, \quad B^\dagger = g(a_1^\dagger - \epsilon a_2) = Q - iP. \tag{14}$$

При таком взаимодействии P и Q, где $\epsilon^2 = 1$, являются интегралами движения, поэтому квантовая корреляция ЭПР пары будет сохраняться.

Чтобы определить возможность усиления, запишем кинетическое уравнение для матрицы плотности электромагнитного поля ρ, которое в низшем по взаимодействию приближении имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{N_0}{\gamma_\perp}(B^\dagger B\rho - B\rho B^\dagger + \text{h.c.}) - \frac{N_1}{\gamma_\perp}(BB^\dagger\rho - B^\dagger\rho B + \text{h.c}), \tag{15}$$

где N_0 и N_1 – заселенности нижнего и верхнего рабочих уровней, а $\gamma_\perp$ – константа поперечной релаксации. Из (15) следуют уравнения для среднего числа фотонов в модах:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_1\rangle = \frac{g^2}{\gamma_\perp}(N_1 - N_0)(\langle n_1\rangle - \langle n_2\rangle + \langle BB^\dagger\rangle) + \frac{g^2}{\gamma_\perp}(N_0 + N_1), \tag{16}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_1\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\langle n_2\rangle = \frac{2g^2}{\gamma_\perp}(N_1 - N_0)\langle BB^\dagger\rangle.$$

Здесь также могут возникать два режима усиления. Так, если $N_1 = N_0$, независимо от наличия исходных корреляций между падающими волнами в результате их взаимодействия в среде, происходит усиление на безинверсном рабочем переходе, когда среднее число фотонов в каждой волне растет пропорционально общему числу атомов, а разница числа фотонов не меняется. Наличие квантово-коррелированных волн типа ЭПР пары, для которой выполнены соотношения (4), приводит к условию $\langle BB^\dagger\rangle = 0$. При этом вновь происходит усиление света в каждой составляющей общего светового поля, для которых среднее число фотонов определяется выражением $\langle n_m\rangle = \langle n_{m0}\rangle + (g^2 t/\gamma_\perp)((N_1 - N_0)(\langle n_{10}\rangle - \langle n_{20}\rangle) + N_1 + N_0)$. Отсюда, в частности, следует, что если в начальный момент число фотонов было одинаковым, то каждая волна будет усиливаться, а корреляция между ними сохраняется.

В этой работе представлены две схемы для усиления двухмодового сжатого света с квантовыми межмодовыми корреляциями. Сохранение исходных квантовых корреляций типа ЭПР обусловлено наличием интегралов движения. Отметим, что найденные схемы приближены к современным экспериментам и вместе с тем далеко не тривиальны, поскольку сами по себе не являются генераторами ЭПР коррелированных световых мод.

Авторы благодарят А. М. Башарова и С. П. Кулика за обсуждение результатов. Работа выполнена при частичной поддержке Delzell Foundation Inc. и программы INTAS INFO 00-479.

---

1. A. Einstein, B. Podolsky, and N.Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
2. C. M. Caves, Phys. Rev. **D26**, 1817 (1982).
3. М. И. Колобов, И. В. Соколов, Опт. и спектр. **63**, 958 (1987).
4. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **102**, 1441 (1992).
5. M. Paris, J. Opt. **B4**, 442 (2002).
6. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **103**, 1931 (1992).
7. A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein et al., Science **282**, 706 (1998).
8. X. Li, Q. Pan, J. Jing et al., E-print, LANL, quant/ph 0107068.
9. B. E. A. Saleh, B. M. Jost, H.-B. Fei, and M. C. Teich, Phys. Rev. Lett. **80**, 3483 (1998).
10. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Опт. и спектр. **84**, 879 (1998).
11. А. М. Башаров, ЖЭТФ **121**, 1249 (2002).
12. D. Wilson, Jinhyong Lee, and M. S. Kim, E-print LANL, quant-ph 0206197 (2001).
13. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 371 (2000).
14. S. L. Brauntstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).
15. P. van Loock and S. L. Braunstein, Phys. Rev. Lett. **84**, 3482 (1998).
16. А. С. Чиркин, В. В. Волков, Г. Д. Лаптев, Е. Ю. Морозов, Квантовая электроника **30**, 847 (2000).
17. А. В. Никандров, А. С. Чиркин, Письма в ЖЭТФ **76**, **33** (2002).