Письма в ЖЭТФ, том 57, вып.9, стр.521 - 525 ©1993 г. 10 мая

БЕЗМАССОВЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ СУПЕРПОЛЯ ВЫСШИХ ПОЛУЦЕЛЫХ СУПЕРСПИНОВ

С.М.Кузенко, В.В.Постников, А.Г.Сибиряков*

Томский государственный университет
634050 Томск, Россия

**Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН*
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 марта 1993 г.

Предложены две суперполевые формулировки (дуальные друг другу) для свободных безмассовых $N = 1$, $D = 4$ суперсимметричных теорий суперспина $(s + 1/2)$, где $s = 2, 3, \ldots$. При $s = 1$ первая версия редуцируется к линеаризованной $n = -1$ неминимальной супергравитации, а вторая – к линеаризованной минимальной супергравитации.

Считается общепринятым, что все $N = 1$, $D = 4$ суперсимметричные теории поля допускают явно суперсимметричную формулировку в терминах суперпространства и суперполей. Однако до сих пор такие реализации были получены только для теорий, описывающих мультиплеты суперспина $s \leq 3/2$; случай безмассового суперспина $s = 3/2$ соответствует супергравитации (безмассовый мультиплет суперспина s часто обозначается $(s, s + 1/2)$). Свободные модели безмассовых мультиплетов высших суперспинов $s > 3/2$ были построены сравнительно давно [1] и основывались на результатах работ [2, 3] по лагранжевой формулировке для полей произвольного спина в терминах симметричных тензоров и спин-тензоров. Точнее говоря, Куртрайт продемонстрировал, что объединенное действие для безмассовых полей спина s и $(s + 1/2)$, где $s = 2, 5/2, 3\ldots$, инвариантно относительно преобразований суперсимметрии, а соответствующие волновые уравнения описывают безмассовое представление суперсалгебры Пуанкаре суперспина s. Преобразования суперсимметрии были также найдены в рамках формулировки для полей высших спинов в терминах несимметричных тензоров и спин-тензоров [4]. Но в обоих подходах [1, 4] суперсимметрия реализована неявно в том смысле, что соответствующие преобразования образуют замкнутую алгебру только на массовой оболочке. В данной заметке мы предлагаем две явно суперсимметричные формулировки, дуальные друг другу, для свободных безмассовых мультиплетов произвольного полуцелого суперспина $s > 3/2$. Обобщение на случай целых суперспинов, а также безмассовых теорий в суперпространстве анти-де Ситтера будет представлено в отдельных публикациях

Предлагаемые суперполевые теории, реализующие безмассовое представление суперсалгебры Пуанкаре суперспина $(s + 1/2)$, где $s = 2, 3, \ldots$, описываются следующими наборами бозонных суперполей[1]:

$$1. \quad H_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)}, \quad \Gamma_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}, \quad \overline{\Gamma}_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}; \qquad (1)$$

[1] Мы используем обозначения, принятые в книге [5]. В частности, $z^A = (x^a, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ – координаты $N = 1$, $D = 4$ суперпространства, $D_A = (\partial_a, D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}})$ – плоские ковариантные производные, $\partial_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_a$. Симметризация спинорных индексов обозначается круглыми скобками, например: $\Phi_{(\alpha_1\ldots\alpha_s)} = \frac{1}{s!}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_s} + (s! - 1)$ перестановок индексов $\alpha_1\ldots\alpha_s$. Симметризация неточечных и точечных индексов производится независимо.

$$2. \quad H_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}, \qquad G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}, \qquad \overline{G}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}. \tag{2}$$

В обоих случаях $H_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} \equiv H_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s}(z)$ – это вещественное суперполе лоренцева типа $(s/2, s/2)$, то есть симметричное отдельно по неточечным и по точечным индексам. Комплексные суперполя $\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ преобразуются в одном представлении $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s-1}{2}\right)$ группы Лоренца, но подчинены существенно различным связям:

$$\overline{D}^{\dot\beta}\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-2}} = 0; \tag{3}$$

$$\overline{D}_{(\dot\alpha_1}G_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_s)} = 0. \tag{4}$$

Здесь симметризация распространяется только на точечные индексы. Уравнения (3) и (4) означают, что Γ и G являются линейными суперполями,

$$\overline{D}^2\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0; \tag{5}$$

$$\overline{D}^2 G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0, \tag{6}$$

где $\overline{D}^2 = \overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}^{\dot\beta}$ $(D^2 = D^\beta D_\beta)$. Суперполе $\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ можно назвать поперечно-линейным, а суперполе $G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ – продольно-линейным.

Заметим, что общее решение уравнения (3) записывается в виде

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = \overline{D}^{\dot\alpha_s}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}(\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)}, \tag{7}$$

где $\xi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s)}$ – произвольное фермионное суперполе лоренцева типа $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s}{2}\right)$. При этом $\xi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s)}$ определено по модулю преобразований

$$\delta\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} = \overline{D}^{\dot\alpha_{s+1}}\Lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}(\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s+1})}, \tag{8}$$

с произвольным бозонным суперпараметром $\Lambda_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s+1)}$ лоренцева типа $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)$. Аналогично общее решение уравнения (4) выглядит так:

$$G_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = \overline{D}_{(\dot\alpha_1}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{s-1})}, \tag{9}$$

где $\zeta_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)}$ – произвольное фермионное суперполе лоренцева типа $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s-2}{2}\right)$, определенное по модулю сдвигов

$$\delta\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-2}} = \overline{D}_{(\dot\alpha_1}\kappa_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{s-2})} \tag{10}$$

с произвольным бозонным суперпараметром $\kappa_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-3)}$ лоренцева типа $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s-3}{2}\right)$. Тем самым суперполе $\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$, подчиненное условию (2), можно трактовать как калибровочно-инвариантную напряженность для суперпотенциала $\xi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s)}$ по отношению к калибровочным преобразованиям (8) (бесконечного порядка приводимости). Суперполе $G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$, подчиненное условию (3), представляет собой калибровочно-инвариантную напряженность для суперпотенциала $\zeta_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)}$ по отношению к калибровочным преобразованиям (10) (конечного порядка приводимости).

Определим калибровочные преобразования для суперполей $H_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$, $\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ по закону:

$$\delta H_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} = \overline{D}_{(\dot\alpha_1}L_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_s)} - D_{(\alpha_1}\overline{L}_{\alpha_2\ldots\alpha_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s}; \tag{11}$$

$$\delta\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = -\frac{1}{4}\overline{D}^{\dot\beta}D^2\overline{L}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}; \tag{12}$$

$$\delta G_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = -\frac{1}{4}\overline{D}^2 D^\beta L_{\beta\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} + i(s-1)\partial^{\beta\dot\beta}\overline{D}_{(\alpha_1}L_{\beta\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{s-1})\dot\beta}. \tag{13}$$

Здесь $L_{\alpha(s)\dot\alpha(s-1)}$ – произвольное фермионное суперполе лоренцева типа $\left(\frac{s}{2},\frac{s-1}{2}\right)$.

Функционал действия, который: 1) квадратичен по суперполям H,Γ и $\overline{\Gamma}$; 2) инвариантен относительно преобразований (11) и (12); 3) приводит в компонентах к полевым уравнениям не выше второго порядка по производным, определяется с точностью до постоянного множителя и выглядит следующим образом:

$$S^{\perp}_{(s+1/2,s+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \int d^8z\left\{\frac{1}{8}H^{\alpha(s)\dot\alpha(s)}D^\beta\overline{D}^2D_\beta H_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}+\right.$$
$$+H^{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)}(D_\beta\overline{D}_{\dot\beta}\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} - \overline{D}_{\dot\beta}D_\beta\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)})+$$
$$\left.+\left(\overline{\Gamma}^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \frac{s+1}{s}\Gamma^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\Gamma_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \text{э.с.}\right)\right\}. \tag{14}$$

Калибровочный произвол (11), (12) дает возможность выбрать калибровку Весса – Зумино:

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} = \theta^\beta\bar\theta^{\dot\beta}h_{(\beta\alpha_1\ldots\alpha_s)(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)}+$$
$$+\bar\theta^2\theta^\beta\Psi_{(\beta\alpha_1\ldots\alpha_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} - \theta^2\bar\theta^{\dot\beta}\bar\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_s(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)} + \theta^2\bar\theta^2A_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s}, \tag{15}$$

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = \exp(i\theta\sigma^a\bar\theta\partial_a)[h_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} + \theta^\beta\bar\Psi_{(\beta\alpha_1\ldots\alpha_{s-1})\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}+$$
$$+\theta_{(\alpha_1}\bar\Psi_{\alpha_2\ldots\alpha_{s-1})\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} + \bar\theta^{\dot\beta}\bar\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1})} + \theta^2B_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}+$$
$$+\theta^\beta\bar\theta^{\dot\beta}U_{(\beta\alpha_1\ldots\alpha_{s-1})(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1})} + \bar\theta^{\dot\beta}\theta_{(\alpha_1}F_{\alpha_2\ldots\alpha_{s-1})(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1})} + \theta^2\bar\theta^{\dot\beta}\bar\rho_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1})}].$$

Все выписанные компонентные поля полностью симметричны по неточечным и по точечным индексам; бозонные поля $h_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s+1)}$, $h_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $A_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ вещественны, а поля $B_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $U_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ комплексны. Нетрудно увидеть, что бозонные поля $A_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$, $B_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$, $U_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ и $F_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)}$ и фермионные поля $\lambda_{\alpha(s)\dot\alpha(s-1)}$, $\rho_{\alpha(s)\dot\alpha(s-1)}$ являются вспомогательными. После интегрирования в (14) по θ, $\bar\theta$ и исключения вспомогательных полей мы получаем объединенную теорию свободных бозонных полей

$$h_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)},\qquad h_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$$

и фермионных полей

$$\Psi_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)}, \quad \Psi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s)}, \quad \Psi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} + \text{э.с.}$$

При этом бозонный сектор действия совпадает с действием Фронсдала [2] для безмассового поля спина $(s+1)$, а фермионный сектор – с действием Фанга и Фронсдала [3] для безмассового поля спина $(s+1/2)$. Тем самым теория (14) описывает безмассовый мультиплет суперспина $(s+1/2)$.

Заметим, что несколько иной выбор калибровки Весса – Зумино, отличной от (15), приводит к описанию бозонного сектора действия (14) в терминах обобщенной тетрады, введенной Васильевым [4].

Выпишем теперь функционал действия суперполей H, G и $\bar G$, который инвариантен относительно калибровочных преобразований (11), (13):

$$S^{\|}_{(s+1/2,s+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \int d^8z \left\{ \frac{1}{8} H^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} D^\beta \overline{D}^2 D_\beta H_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} - \right.$$
$$- \frac{1}{8}\frac{s}{2s+1}[D_\beta, \bar D_{\dot\beta}] H^{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} [D^\gamma, \overline{D}^{\dot\gamma}] H_{\gamma\alpha(s-1)\dot\gamma\dot\alpha(s-1)} +$$
$$+ \frac{s}{2}\partial_{\beta\dot\beta} H^{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} \partial^{\gamma\dot\gamma} H_{\gamma\alpha(s-1)\dot\gamma\dot\alpha(s-1)} +$$
$$+ \frac{2is}{2s+1}\partial_{\beta\dot\beta} H^{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} (G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} - \bar G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}) +$$
$$\left. + \frac{1}{2s+1}\left(\bar G^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} - \frac{s+1}{s} G^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} G_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \text{э.с.} \right) \right\}. \tag{16}$$

Данное действие также описывает безмассовый мультиплет суперспина $(s+1/2)$. В самом деле, теория (14) и (16) эквивалентны, поскольку они связаны преобразованием дуальности через следующее вспомогательное действие:

$$S[H, G, V] = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \int d^8z \left\{ \frac{1}{8} H^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} D^\beta \overline{D}^2 D_\beta H_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} + \right.$$
$$+ \left(H^{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} D_\beta \overline{D}_{\dot\beta} V_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} - \frac{2}{s} G^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} V_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \right.$$
$$\left.\left. + \overline{V}^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} V_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \frac{s+1}{s} V^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} V_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \text{э.с.} \right) \right\}. \tag{17}$$

Здесь переменная $V_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ – это произвольное комплексное суперполе лоренцева типа $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s-1}{2}\right)$.

Имеется чисто суперполевое доказательство того, что теории (14) и (16) описывают безмассовый суперспин $(s+1/2)$. А именно, единственные калибровочно-инвариантные напряженности, выживающие на массовой оболочке, – это киральное суперполе лоренцева типа $(s+1/2, 0)$

$$W_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s+1}} = \bar D^2 \partial_{(\alpha_1}{}^{\dot\beta_1} \ldots \partial_{\alpha_s}{}^{\dot\beta_s} D_{\alpha_{s+1}} H_{\alpha_{s+2}\ldots\alpha_{2s+1})\dot\beta_1\ldots\dot\beta_s} \tag{18}$$

и сопряженное к нему. На уравнениях движения напряженность $W_{\alpha(2s+1)}$ удовлетворяет уравнению

$$D^\beta W_{\beta\alpha(2s)} = 0 \tag{19}$$

и, следовательно, представляет собой on-shell безмассовое суперполе суперспиральности $(s + 1/2)$ [6].

В заключение обсудим ситуацию, возникающую при $s = 1$. Такой выбор является особым в рамках описанной выше схемы, поскольку уравнение (3) осмысленно только если $s > 1$. Однако при $s = 1$ мы можем по-прежнему использовать следствие этого уравнения (5), считая Γ произвольным комплексным суперполем. Тогда соответствующий функционал (14) в точности совпадает с действием линеаризованной $n = -1$ неминимальной супергравитации [7]. Далее, при $s = 1$ (и только в этом случае) уравнение (4) означает киральность, $\bar{D}_{\dot{\alpha}} G = 0$; чисто киральным становится и выражение в правой части калибровочного закона (13). Соответствующий функционал (16) совпадает с действием линеаризованной минимальной ($n = -1/3$) супергравитации [7]. По-видимому, новая минимальная формулировка ($n = 0$) специфична только для супергравитации (суперспин 3/2) и не может служить основой для обобщений на высшие суперспины.

1. **T.Curtright**, Phys. Lett. **85B**, 219 (1979).
2. **C.Fronsdal**, Phys. Rev. **D18**, 3624 (1978).
3. **J.Fang** and C.Fronsdal, Phys. Rev. **D18**, 3630 (1978).
4. М.А.Васильев, ЯФ , 855 (1980).
5. Ю.Весс, Дж.Беггер, Суперсимметрия и супергравитация, М.: Мир, 1986.
6. **S.J.Gates**, M.T.Grisaru, M.Rocek, and W.Siegel, Superspace (Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1983).
7. **W.Siegel** and S.J.Gates, Nucl. Phys. **B 147**, 77 (1979).