

ДВИЖЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОНА ВДОЛЬ КРАЯ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.В.Иорданский, Б.А.Музыкантский

*Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
117334 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 апреля 1993 г.

Рассмотрено движение двумерного электрона в сильном магнитном поле вдоль края образца. Учтены эффекты рассеяния на примесях, расположенных вблизи края, в предположении о большой корреляционной длине создаваемого ими потенциала. Показано, что дрейфовая скорость электрона обратно пропорциональна числу одномерных каналов, образующихся вблизи края.

В последнее время активно исследуются, теоретически и экспериментально, краевые состояния двумерных электронов в сильном магнитном поле. Большой прогресс имеется, в частности, в изучении плазмонных краевых мод в режиме квантового эффекта Холла, когда спектр краевых возбуждений формируется за счет кулоновского взаимодействия между электронами [1,2]. В то же время, одновременный учет межэлектронного взаимодействия и рассеяния на примесном потенциале – это трудная и до сих пор не решенная задача [3]. Нам кажется интересным в этой связи изучить влияние примесного потенциала на свойства краевых состояний в отсутствии кулоновского взаимодействия.

Мы рассмотрим плавный на магнитной длине потенциал. В простейшем дрейфовом приближении электрон движется вдоль линии уровня $V(x, y) = E$, а волновая функция имеет вид:

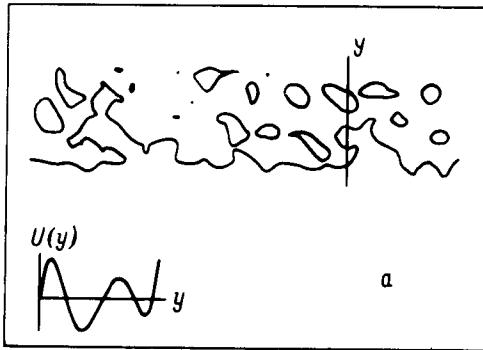
$$\chi_E(x, y) = e^{i\varphi(s)} f_0(n/l_h), \quad \varphi(s) = \frac{e}{c} \int^s A_h ds, \quad (1)$$

где A_h – вектор-потенциал внешнего магнитного поля, f_0 – осцилляторная функция, l_h – магнитная длина, n – расстояние по нормали до линии уровня, а s – длина вдоль линии уровня.

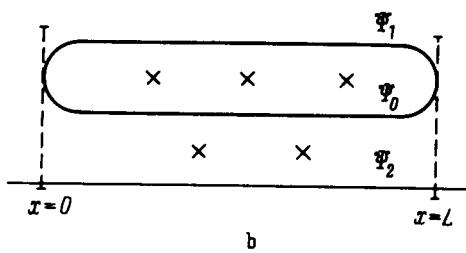
Приблизительный ход потенциала и вид линий уровня вблизи края образца приведен на рисунке *a*. Нормаль к краю пересекает любую линию уровня $V(x, y) = E$ нечетное число раз, причем скорости дрейфа электрона в точках пересечения альтернируются в соответствии со знаком $\frac{\partial V}{\partial n}$. В окрестности седел потенциала волновые функции (1) на разных компонентах линии уровня перекрываются. В результате электрон может протуннелировать с края на расположенные вблизи "острова", окруженные линией уровня той же энергии. За счет этого скорость дрейфа электрона вдоль края уменьшается.

Мы покажем, что это не приводит к локализации электронных состояний и вычислим перенормировку скорости дрейфа электрона вдоль края.

Рассмотрим модельную ситуацию, когда каждый уровень $V = E$ повторяется не более трех раз (рисунок *b*, крестами отмечены седла потенциала). Нормаль к краю в типичной точке пересекает линию уровня $V(x, y) = E$ три раза, поэтому волновую функцию нужно считать трехкомпонентным комплексным



a



b

Вид линий уровня вблизи края и ход потенциала вдоль нормали к нему (a) и модель для выяснения особенностей поведения электронной волновой функции (b). Крестами обозначены седла потенциала

вектором

$$\vec{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что в нулевом канале электрон движется налево, а в первом и втором – направо и рассмотрим сначала случай одинаковых по модулю скоростей в каждом канале $v_0 = v_1 = v_2 \equiv v_d$.

Трансфер-матрица, связывающая значения волновой функции на концах неупорядоченного отрезка $\vec{\Psi}(x) = \hat{T}(x)\vec{\Psi}(0)$ должна сохранять суммарный ток через три канала

$$j = v_d(-|\Psi_0|^2 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) = v_d \langle \vec{\Psi} \vec{\Psi} \rangle. \quad (2)$$

Таким образом, введенное в (2) псевдоскалярное произведение сохраняется трансфер-матрицей:

$$\langle AB \rangle = A^+ \hat{g} B, \quad g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \hat{T} A \hat{T} B \rangle = \langle AB \rangle. \quad (3)$$

Мы рассмотрим борновский случай слабого рассеяния, полагая приращения трансфер-матрицы при увеличении длины неупорядоченного отрезка независимыми случайными величинами типа белого шума:

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dx} = \hat{\Xi}(x)\vec{\Psi}, \quad \hat{\Xi} = i \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\delta_1 & -\delta_2 \\ \delta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \delta_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где γ_j, δ_j ($j = 1, 2$) – случайные действительные функции координаты $(\delta_k(x)\delta_j(x')) = \frac{1}{2i}\delta_{k,j}\delta(x-x')$. Симметрия $\hat{\Xi}$ следует из (3), нулевые матричные элементы учитывают отсутствие рассеяния из первого канала во второй. Диагональные элементы $\hat{\Xi}$ велики по сравнению с недиагональными, поскольку включают систематическое изменение фазы волновых функций (1) в отсутствие рассеяния.

Нас будет интересовать время прохождения электрона через неупорядоченный участок края длины L . Граничные условия естественно представить в виде:

$$\Psi_0(0) = \Psi_1(0), \quad \Psi_0(L) = \Psi_1(L), \quad \vec{\Psi}_2(0) = 1, \quad (5)$$

что соответствует замыканию нулевого и первого каналов в петлю (рисунок *b*). В силу сохранения тока, изменение волновой функции электрона, падающего по второму каналу, сводится к набору фазы $\tilde{\Psi}_2(L) = e^{i\theta}$. Пусть теперь на неупорядоченный участок слева по второму каналу падает волновой пакет $\tilde{\Psi}_{2,in} = \int f(p)e^{ipx} dp$. Волновая функция на выходе через время t будет иметь вид

$$\tilde{\Psi}_{2,out} = \int f(p)e^{-iEt+i\theta(E,L)} dp, \quad (6)$$

где $E = p v_d$ – энергия электрона. Легко видеть, что узкий в координатном пространстве пакет $f(p) = \text{const}$ появится на противоположном конце с задержкой на время $\tau = \frac{\partial\theta}{\partial E}$. С другой стороны, $\frac{\partial\theta}{\partial E}$ это просто плотность состояний в неупорядоченном отрезке, которая не перенормируется при включении рассеяния между каналами, таким образом, $\langle \tau \rangle = \frac{3}{v_d} L$. Этот результат немедленно обобщается на многоканальный случай, когда в n каналах электрон распространяется в одну сторону, а в $n+1$ – в другую:

$$\langle \tau \rangle = L \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{v_i}, \quad (7)$$

где v_i – модули скоростей в каналах.

Интерпретация плотности состояний как времени прохождения пакета законна, когда флуктуации τ малы: $\Delta\tau \equiv \sqrt{(\tau - \bar{\tau})^2} \ll \tau$. Мы покажем, что $\Delta\tau \sim \sqrt{L}$ для достаточно длинных неупорядоченных отрезков $L \gg l$.

Удобно связать время прохождения через неупорядоченный участок со средним значением тока

$$\frac{1}{\tau} = \frac{j}{\sum_i \int_0^L |\Psi_i|^2 dx}. \quad (8)$$

Для оценки нормировочного интеграла необходимо перенести граничные условия (5) во внутреннюю точку. Рассмотрим вспомогательные векторы $\xi^\pm(x)$, удовлетворяющие уравнению $\frac{d\xi^\pm}{dx} = \hat{\Xi}\xi^\pm$ и граничным условиям

$$\xi^+(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi^-(L) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

поставленным, соответственно, на левой и правой границе неупорядоченного отрезка. Векторы $\xi^\pm(x)$ ортогональны $\vec{\Psi}(x)$ в смысле скалярного произведения (3)

$$0 = \langle \vec{\xi}^+(0) \vec{\Psi}(0) \rangle = \langle \vec{\xi}^-(L) \vec{\Psi}(L) \rangle = \langle \vec{\xi}(x) \vec{\Psi}(x) \rangle. \quad (10)$$

Здесь первые два равенства следуют из (5), (9), а третье из инвариантности произведения (3). Поскольку $\langle \vec{\Psi}(x) \vec{\Psi}(x) \rangle = \langle \vec{\Psi}(0) \vec{\Psi}(0) \rangle = 1$, направления векторов

$\vec{\xi}^\pm(x)$ определяют $\vec{\Psi}(x)$ с точностью до фазового множителя. В частности, квадрат модуля волновой функции

$$|\vec{\Psi}(x)|^2 \equiv \sum_i |\Psi_i|^2 = \frac{|\xi_1^+ - \xi_1^-|^2 + |\xi_2^+ - \xi_2^-|^2 + |\Delta|^2}{|\xi_1^+ - \xi_1^-|^2 + |\xi_2^+ - \xi_2^-|^2 - |\Delta|^2}, \quad \Delta = \xi_2^+ \xi_1^- - \xi_2^- \xi_1^+. \quad (11)$$

Величины $\vec{\xi}^\pm(x)$ статистически независимы, поскольку определяются трансфер-матрицами на непересекающихся отрезках $[0, x]$ и $[x, L]$ соответственно. Введем координаты

$$\vec{\xi}^\pm = \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \phi e^{i\alpha_1} \\ \sin \phi e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где учтено $\langle \vec{\xi}^+(x) \vec{\xi}^-(x) \rangle = 0$. При этом множество направлений световых (то есть с равным нулю скалярным квадратом) векторов параметризуется точками трехмерной сферы S^3 . Динамика (4), таким образом, индуцирует блуждание на S^3 , если следить лишь за направлением светового вектора $\vec{\xi}^+$. Поскольку диагональные элементы $\hat{\Xi}$ велики по сравнению с недиагональными, фазы α_1, α_2 оказываются быстрыми переменными, по которым можно провести усреднение [4]. Оставшееся уравнение Ланжевена на ϕ имеет вид

$$\frac{d\phi}{dx} = -\delta_1 \sin \alpha_1 \sin \phi + \delta_2 \sin \alpha_2 \cos \phi + \frac{1}{2l} (\operatorname{ctg} \phi - \operatorname{tg} \phi). \quad (13)$$

Соответствующее уравнение Фоккера – Планка

$$2l \frac{\partial P(\phi, L)}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-2 \operatorname{ctg} 2\phi P + \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) \quad (14)$$

имеет устойчивое стационарное решение $P_\infty = \sin(2\phi)$, которое, как легко видеть, совпадает с равномерным распределением по сфере S^3 . То же верно и для направления вектора $\vec{\xi}^-$. С помощью этих результатов для среднего (11) легко получить $(|\vec{\Psi}(x)|^2) = 3$, что вместе с (8) позволяет еще раз получить (7) для $n = 1$.

Интересующая нас оценка на $\Delta\tau$ следует из существования стационарного распределения для направлений векторов $\vec{\xi}^\pm$. Достаточно разбить интеграл

$$\int_0^L \sum_i |\Psi_i|^2 dx$$

в знаменателе (8) на отрезки длиной ΔL , $l \ll \Delta L \ll L$ так, чтобы стационарное распределение успело установиться на каждом из них. Интегралы по отрезкам будут статистически независимы, откуда и следует приведенная выше оценка для дисперсии $\Delta\tau$.

Таким образом, мы показали, что среднее время прохождения через неупорядоченный участок края совпадает с плотностью краевых состояний (7) и обратно пропорционально числу образующихся вблизи края одномерных каналов. Для характерной флюктуации времени прохождения получена оценка $\Delta\tau \sim \sqrt{L} \ll \tau$.

В процессе работы над настоящей статьей авторы получили возможность ознакомиться с результатами недавно вышедшей работы [5], где обсуждается задача о прозрачности системы одномерных каналов, в каждом из которых электрон движется в одну сторону, с рассеянием между ними. Мы хотим отметить, что результаты [5] согласуются с нашими вычислениями и по сути являются следствием сохранения тока. Действительно, трансфер-матрица \hat{T} в системе с M правыми и N левыми каналами (пусть для определенности $M > N$) лежит в группе $SU(M, N)$, то есть сохраняет форму

$$\langle AB \rangle = A^+ \hat{g}_{M,N} B \quad \hat{g}_{M,N} = \text{Diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^M, \overbrace{-1, \dots, -1}^N), \quad \hat{T}^+ \hat{g}_{M,N} \hat{T} = \hat{g}_{M,N}. \quad (15)$$

Из последнего равенства $\hat{g}_{M,N}^{-1} \hat{T}^+ \hat{g}_{M,N} = \hat{T}^{-1}$ видно, что собственные числа $\{\lambda_1^*, \dots, \lambda_{N+M}^*\}$, $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{N+M}^{-1}\}$ матриц \hat{T}^+ и \hat{T}^{-1} совпадают. Таким образом, либо $|\lambda_i| = 1$, либо существует еще одно собственное число λ_j , $\lambda_i = 1/\lambda_j^*$. Нетрудно показать, ортогонализуя собственный базис \hat{T} и пользуясь законом инерции квадратичных форм, что число K собственных чисел \hat{T} равных по модулю единице не меньше чем $M - N$, причем как минимум $M - N$ из соответствующих собственных векторов отвечает состояниям распространяющимся направо. Важно, что строгое неравенство $K > M - N$ имеет место лишь для матриц достаточно близких к единице¹⁾. Таким образом, в достаточно длинной системе рассеивателей имеется ровно $N - M$ распространяющихся направо состояний, в то время как все состояния, распространяющиеся в другую сторону, экспоненциально растут или спадают и, следовательно, локализованы.

Авторы благодарят фонд Сороса и Американское физическое общество за финансовую помощь при выполнении настоящей работы. Один из авторов (Б.М.) также благодарит Л.С.Левитова за ценные обсуждения.

Один из авторов (С.В.И.) выражает свою благодарность НАТО (NATO collaboration grant № 9211333) за возможность посещения лаборатории магнитных полей института Макса Планка в Гренобле, а также благодарит профессора П.Видера (P.Wyder) за стимулирующую дискуссию.

1. В.А.Волков, С.А.Михайлов, ЖЭТФ **94**, 217 (1988).
2. X.G.Wen, Phys.Rev. **B44**, 5708 (1991).
3. В.Б.Шикин, ЖЭТФ **1989**, 1513 (1989)
4. И.М.Лифшиц, С.А.Гредескул, Л.А.Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
5. C.Barnes, B.L.Jonson, and G.Kirczenov, Phys. Rev. Lett. **70** p.1159 (1993).

¹⁾ Это легко показать для простейшего случая $SU(1, 1)$, к которому можно свести общий.