

Перепутанные фотонные состояния при последовательных нелинейно-оптических взаимодействиях

А. В. Родионов, А. С. Чиркин¹⁾

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 января 2004 г.

Развита квантовая теория двух последовательных параметрических взаимодействий световых волн с некротными частотами, имеющих общую волну накачки и протекающих в одном кристалле. Унитарный оператор эволюции рассматриваемой системы методом дифференцирования приведен к упорядоченной форме, которая позволила рассчитать состояние поля и статистические характеристики взаимодействующих волн. Показано, что в случае вакуумного начального состояния поля рождающиеся фотоны на взаимодействующих частотах имеют суперпуассоновскую статистику и находятся в многочастичном перепутанном состоянии.

PACS: 03.67.Mn, 42.50.Dv, 42.65.Ky

Предмет настоящего письма – разработка квантовой теории последовательных нелинейно-оптических взаимодействий волн с некротными частотами и анализ состояний генерируемых фотонов. При этом показано, что рассмотренный тип взаимодействий может быть источником многочастичных (многофотонных) перепутанных состояний.

В квантовой оптике различают перепутывание между отдельными фотонами [1], квадратурными компонентами поля [2] и стоксовыми параметрами [3], характеризующими состояние поляризации. Перепутанные квантовые состояния находят применение как в экспериментах по проверке основ квантовой механики, так и в различных приложениях квантовой информации [4].

Основу многих применений перепутанных состояний в настоящее время составляют двухфотонные перепутанные состояния, формируемые в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) света в однородных нелинейных кристаллах [5]. Вместе с тем по ряду причин особый интерес для приложений вызывают многофотонные перепутанные состояния. Так, например, при проверке неравенств Белла [6] с двухчастичными перепутанными состояниями противоречие с локальным реализмом имеет место лишь для статистических предсказаний [7], тогда как в случае многочастичного перепутывания – для детерминированных предсказаний [8]. К настоящему времени предложены методы получения трех- [9] и четырех- [10] фотонных перепутанных состояний, использующие две независимые пары поляризационно-перепутанных состояний фото-

нов, четырехфотонных перепутанных состояний, возникающих за время действия высокоинтенсивного короткого импульса накачки в процессе СПР [11], а также метод многофотонного перепутывания в оптических солитонах [12].

В данной работе рассмотрен новый источник многофотонных перепутанных состояний, основанный на двух последовательных трехчастотных взаимодействиях волн с некротными частотами ω_1 , ω_2 и ω_3 в поле интенсивной классической накачки с частотой ω_p . Рассматриваемые взаимодействия состоят из параметрического процесса в поле низкочастотной накачки

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \quad (1)$$

и процесса параметрического сложения частот

$$\omega_1 + \omega_p = \omega_3. \quad (2)$$

Процессы (1) и (2) можно одновременно реализовать при коллинеарном взаимодействии волн в кристаллах с регулярной доменной структурой, например в кристалле LiNbO_3 [13]. В таких кристаллах условие эффективного энергообмена между взаимодействующими волнами – условие фазового квазисинхронизма – можно выполнить одновременно для процессов (1), (2) с помощью подбора периода доменной структуры, то есть периода модуляции нелинейного коэффициента связи волн [14].

В приближении заданного поля накачки одновременное протекание процессов (1), (2) можно описать гамильтонианом взаимодействия вида

$$H_{int} = i\hbar\{\beta_1(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2) + \beta_2(a_3^+ a_1 - a_3 a_1^+)\}, \quad (3)$$

¹⁾e-mail: chirkin@squeeze.phys.msu.su; aschirkin@pisem.net

где a_j^+ (a_j) – оператор рождения (уничтожения) фотонов с частотой ω_j , \hbar – постоянная Планка, β_j – эффективный нелинейный коэффициент, пропорциональный квадратичной восприимчивости кристалла и амплитуде волны накачки. Бозонные операторы a_k^+ и a_j удовлетворяют традиционным коммутационным соотношениям $[a_j, a_k^+] = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронекера. Слагаемые в (3), содержащие коэффициент β_1 , описывают процесс (1), а слагаемые, содержащие коэффициент β_2 , – процесс (2).

Состояние поля $|\Psi(z)\rangle$ на выходе нелинейного кристалла определяется унитарным оператором эволюции $U(z) \equiv \exp[-iH_{int}z/\hbar]$:

$$|\Psi(z)\rangle = U(z)|\Psi(0)\rangle, \quad (4)$$

где $|\Psi(0)\rangle$ – начальное состояние поля.

Однако непосредственное действие унитарного оператора на начальное состояние в общем виде не удастся рассчитать без предварительного его преобразования. В связи с этим введем антиэрмитовы операторы

$$\begin{aligned} \sigma_d &= (a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2), \\ \sigma_u &= \varepsilon(a_3^+ a_1 - a_3 a_1^+), \\ \sigma_a &= -\varepsilon(a_2^+ a_3^+ - a_2 a_3), \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициент $\varepsilon = \beta_2/\beta_1$ считаем действительным без потери общности. Вспомогательный оператор σ_a формально описывает процесс генерации частот ω_2 и ω_3 в поле накачки с частотой $\omega_2 + \omega_3$. Операторы σ_d , σ_u и σ_a подчиняются алгебре SH(3) [15], то есть образуют замкнутый относительно операции коммутации набор:

$$\begin{aligned} [\sigma_d, \sigma_u] &\equiv \sigma_d \sigma_u - \sigma_u \sigma_d = \sigma_a, \\ [\sigma_a, \sigma_d] &= -\sigma_u, \quad [\sigma_u, \sigma_a] = \varepsilon^2 \sigma_d. \end{aligned} \quad (6)$$

В новых обозначениях унитарный оператор можно представить в виде двух эквивалентных форм:

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= e^{\zeta(\sigma_d + \sigma_u)} = \\ &= \exp[\alpha(\zeta)\sigma_d] \times \exp[\eta(\zeta)\sigma_a] \times \exp[\xi(\zeta)\sigma_u], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\zeta \equiv \beta_1 z$, а $\alpha(\zeta)$, $\eta(\zeta)$ и $\xi(\zeta)$ – неизвестные функции, которые находятся методом дифференцирования [16]. Такой метод заключается в том, что после дифференцирования обеих частей равенства по ζ в его правой части с помощью операторных преобразований выделяют оператор $U(\zeta)$, а затем приравнивают коэффициенты перед операторами σ_d , σ_a и σ_u . Заметим, что последовательность экспоненциальных операторов в правой части равенства (7) диктуется удобством решения поставленной задачи.

Для определения функций $\alpha(\zeta)$, $\eta(\zeta)$ и $\xi(\zeta)$ получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha'(\zeta) - \varepsilon \xi'(\zeta) \operatorname{sh}(\eta(\zeta)\varepsilon) &= 1, \\ \eta'(\zeta) \operatorname{ch}(\alpha(\zeta)) + \xi'(\zeta) \operatorname{ch}(\eta(\zeta)\varepsilon) \operatorname{sh}(\alpha(\zeta)) &= 0, \\ \eta'(\zeta) \operatorname{sh}(\alpha(\zeta)) + \xi'(\zeta) \operatorname{ch}(\eta(\zeta)\varepsilon) \operatorname{ch}(\alpha(\zeta)) &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

с начальными условиями $\alpha(0) = \eta(0) = \xi(0) = 0$.

Можно убедиться, что при $\varepsilon < 1$ решением (8) являются функции

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \operatorname{arth} \frac{\theta \operatorname{sh} \theta \zeta}{\operatorname{ch} \theta \zeta - \varepsilon^2}, \\ \eta(\zeta) &= \varepsilon^{-1} \operatorname{arsh} \varepsilon \theta^{-2} (1 - \operatorname{ch} \theta \zeta), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\xi(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\operatorname{ch}[\alpha(x)]}{\operatorname{ch}[\varepsilon \eta(x)]} dx,$$

где $\theta \equiv \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Для нашего анализа конкретный вид функции $\xi(\zeta)$ не важен.

Далее операцию упорядочивания применяем к каждому экспоненциальному оператору в (7). Упорядоченный вид оператора $\exp[\alpha(\zeta)\sigma_d]$ приведен, например, в [17]. В результате получаем следующее окончательное упорядоченное выражение для унитарного оператора эволюции:

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= \exp[\operatorname{th}(\alpha) a_1^+ a_2^+] \times \\ &\times \exp[-\ln(\operatorname{ch}(\alpha))(1 + a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2)] \times \\ &\times \exp[-\operatorname{th}(\varepsilon \eta) a_2^+ a_3^+] \times \exp[-\operatorname{th}(\alpha) a_1 a_2] \times \\ &\times \exp[\operatorname{th}(\varepsilon \eta) \operatorname{th}(\alpha) a_3^+ a_1] \times \\ &\times \exp[-\ln(\operatorname{ch}(\varepsilon \eta))(1 + a_2^+ a_2 + a_3^+ a_3)] \times \\ &\times \exp[\operatorname{th}(\varepsilon \xi) a_3^+ a_1] \times \\ &\times \exp[\operatorname{th}(\varepsilon \eta) a_2 a_3] \times \exp[\operatorname{th}(\varepsilon \eta) \operatorname{tg}(\varepsilon \xi) a_1 a_2] \times \\ &\times \exp[-\ln(\cos(\varepsilon \xi))(a_1^+ a_1 - a_3^+ a_3)] \times \\ &\times \exp[-\operatorname{tg}(\varepsilon \xi) a_1^+ a_3], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\alpha \equiv \alpha(\zeta)$, $\beta \equiv \beta(\zeta)$ и $\xi \equiv \xi(\zeta)$.

Предположим, что на нелинейный кристалл подается лишь интенсивная волна накачки, а начальные состояния полей на частотах ω_1 , ω_2 и ω_3 – вакуумные, то есть начальный вектор состояния $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \equiv |0, 0, 0\rangle$. В соответствии с (10) на выходе кристалла имеем состояние

$$\begin{aligned} |\Psi(\zeta)\rangle &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha(\zeta)} \frac{1}{\operatorname{ch}(\varepsilon \eta(\zeta))} \sum_{m, n=0}^{\infty} (\operatorname{th} \alpha(\zeta))^m \times \\ &\times \left(-\frac{\operatorname{th}(\varepsilon \eta(\zeta))}{\operatorname{ch} \alpha(\zeta)} \right)^n \sqrt{\frac{(m+n)!}{m! n!}} |m, m+n, n\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь индекс m относится к числу фотонов на частоте ω_1 , $m+n$ – числу фотонов на частоте ω_2 , а n –

на частоте ω_3 . Различные состояния $|m, m+n, n\rangle$ образуют ортогональный базис в пространстве фоковских состояний. Фактически выражение (11) полностью определяет решение поставленной нами задачи. Пользуясь вектором состояния (11), можно записать выражение для матрицы плотности $\rho = |\Psi(\zeta)\rangle\langle\Psi(\zeta)|$ и рассчитать статистические характеристики генерируемого излучения на выходе кристалла.

Функции распределения чисел фотонов $P_j(N) = \text{Sp}(\rho_j \hat{N})$, где \hat{N} – оператор числа фотонов, а ρ_j – матрица плотности поля на частоте ω_j , даются выражениями

$$\begin{aligned} P_1(N) &= \frac{\text{th}^{2N}(\alpha(\zeta))}{\text{ch}^2(\varepsilon\eta(\zeta))}, \\ P_2(N) &= \frac{1}{\text{ch}^2(\alpha(\zeta)) \text{ch}^2(\varepsilon\eta(\zeta))} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\text{th}^2(\varepsilon\eta(\zeta))}{\text{sh}^2(\alpha(\zeta))}\right)^N \text{th}^{2N}(\alpha(\zeta)), \\ P_3(N) &= \frac{\text{th}^{2N}(\varepsilon\eta(\zeta))}{\text{ch}^2(\varepsilon\eta(\zeta))}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда следует, что статистика генерируемых фотонов в общем случае является суперпуассоновской (дисперсия числа фотонов гораздо больше его среднего значения). Однако при малых длинах взаимодействия ($\beta_1 z < 1$) она близка к пуассоновской.

Для средних чисел фотонов имеем

$$\begin{aligned} \langle n_1(\zeta) \rangle &= \text{sh}^2 \alpha(\zeta) \text{ch}^2(\varepsilon\eta(\zeta)), \\ \langle n_3(\zeta) \rangle &= \text{sh}^2(\varepsilon\eta(\zeta)), \\ \langle n_2(\zeta) \rangle &= \langle n_1(\zeta) \rangle + \langle n_3(\zeta) \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание (9), получаем

$$\begin{aligned} \langle n_1(\zeta) \rangle &= \theta^{-2} \text{sh}^2(\theta\zeta), \\ \langle n_3(\zeta) \rangle &= \varepsilon^2 \theta^{-2} (\text{ch}(\theta\zeta) - 1)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно (13), при $\varepsilon < 1$ (θ – действительное) имеет место экспоненциальный рост среднего числа фотонов. В этом случае $\beta_1 > \beta_2$, то есть процесс распада фотонов накачки на фотоны с частотами ω_1 и ω_2 происходит более эффективно, чем процесс рождения фотонов с частотой ω_3 . В противоположном случае ($\beta_1 < \beta_2$, $\varepsilon > 1$) в выражениях (9) гиперболические функции следует заменить на тригонометрические ($\text{sh} \rightarrow \sin$, $\text{ch} \rightarrow \cos$, при этом $\theta^2 \rightarrow (\varepsilon^2 - 1)$), а статистические параметры имеют осцилляционную зависимость от длины взаимодействия.

В соответствии с (11), поле на выходе кристалла находится в перепутанном состоянии [18], поскольку его нельзя представить в факторизованном виде

$|\Psi\rangle \neq |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_3\rangle$, где $|\Psi_j\rangle$ – состояние поля на частоте ω_j . Предположим, что существует возможность выделения, например, поля с двумя фотонами на частоте ω_2 . Тогда нормированный вектор его состояния имеет вид

$$\begin{aligned} |\Psi(\zeta)\rangle_{\text{cond}} &= \mathcal{N} \left\{ q_{20}(\zeta) |2, 2, 0\rangle + \right. \\ &\left. + q_{11}(\zeta) |1, 2, 1\rangle + q_{02}(\zeta) |0, 2, 2\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты q_{ij} определяются из (11), а $\mathcal{N}^2 \equiv (q_{20}^2(\zeta) + q_{11}^2(\zeta) + q_{02}^2(\zeta))^{-1}$ есть нормировочный коэффициент. На частотах ω_1 и ω_3 мы имеем аналог трехуровневой системы для данного набора чисел фотонов. Такие состояния полей могут быть использованы, по-видимому, в качестве кутритов. Другой метод получения кутритов рассмотрен в [19].

Значения амплитуд вероятностей $C_{jk}(\zeta) = \mathcal{N} q_{jk}(\zeta)$ в зависимости от длины взаимодействия представлены на рис.1. Видно, что для рассматриваемых конфигураций полей их амплитуды

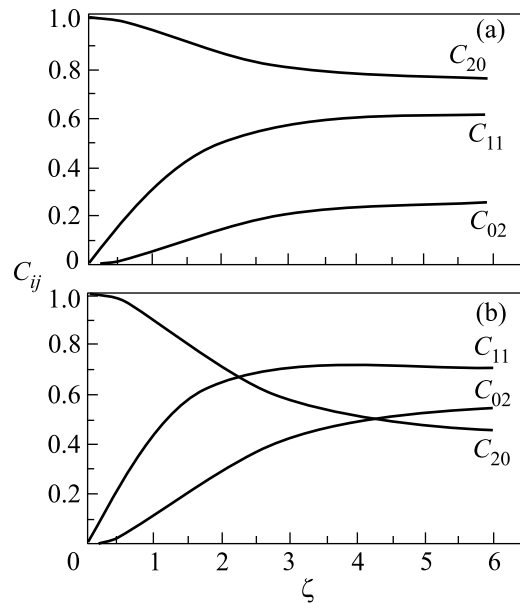


Рис.1. Амплитуды вероятностей C_{jk} генерации двух фотонов на частоте ω_2 и j и k фотонов на частотах ω_1 и ω_3 , соответственно, в зависимости от приведенной длины взаимодействия $\zeta = \beta_1 z$ для случаев: (а) $\varepsilon = \beta_2/\beta_1 = 0.5$; (б) $\varepsilon = \beta_2/\beta_1 = 0.75$

вероятностей на некоторых длинах взаимодействия могут отличаться не сильно. Оценки показывают, что в кристалле LiNbO_3 длиной $z = 1$ см значение $\zeta = \beta_1 z = 1$ достигается при интенсивностях накачки $I \sim 10^6$ Вт/см² (взаимодействия типа $e \rightarrow ee$).

Для характеристики связи фотонов на частотах ω_1 , ω_2 и ω_3 был рассчитан коэффициент тройной корреляции

$$g^{(3)}(n_1, n_2, n_3) \equiv \frac{\langle n_1 n_2 n_3 \rangle}{\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \langle n_3 \rangle} = \frac{2[2 + 3 \operatorname{sh}^2 \alpha(\zeta) + \operatorname{th}^2(\varepsilon \eta(\zeta))]}{\operatorname{sh}^2 \alpha(\zeta) + \operatorname{th}^2(\varepsilon \eta(\zeta))}, \quad (16)$$

который можно измерить в схеме тройных совпадений. Типичная зависимость $g^{(3)}$ от длины взаимодействия представлена на рис.2. Из рис.2 следует, что на начальном этапе взаимодействия между фо-

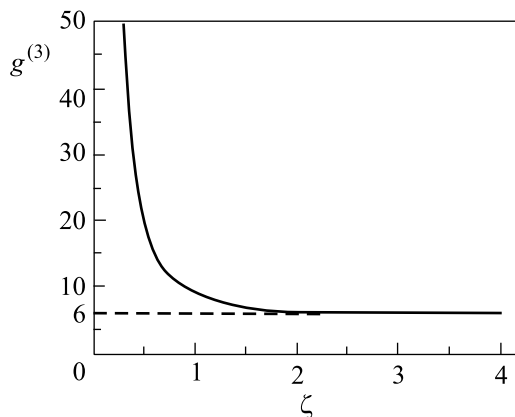


Рис.2. Коэффициент тройной корреляции $g^{(3)}(n_1, n_2, n_3)$ в зависимости от приведенной длины взаимодействия $\zeta = \beta_{1z}$ при $\varepsilon = \beta_2/\beta_1 = 0.5$

тонами на частотах ω_1 , ω_2 и ω_3 существует сильная неклассическая корреляция, которая уменьшается по мере роста длины взаимодействия. Действительно, для когерентных и статистически независимых полей $g^{(3)} = 1$. В то же время, для случая полностью статистически зависимых полей с гауссовой статистикой $g^{(3)} = 6$ [20]. К последнему значению и стремится коэффициент $g^{(3)}$ со стороны больших значений с ростом длины взаимодействия.

В заключение подчеркнем, что основным результатом развитой теории является вывод упорядоченного выражения для унитарного оператора эволюции (10) для последовательных нелинейно-оптических взаимодействий с некротными частотами и получение выражения (11) для вектора состояния поля на выходе нелинейного кристалла в случае вакуумного начального состояния. Формула (11) ясно показывает, что рождаемые фотоны находятся в перепутанном состоянии. При числе фотонов, равных m и M , на частотах ω_1 и ω_2 соответственно, на частоте ω_3 генерируется n фотонов, причем $n = M - m$, а m и n могут принимать значе-

ния от 0 до M . Таким образом, рассмотренный вид нелинейно-оптических взаимодействий может служить источником многофотонных перепутанных состояний.

Авторы благодарят С. П. Кулика за полезное обсуждение результатов настоящей работы и В. И. Манько за плодотворную дискуссию по теории групп.

Настоящая работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований # 04-02-17554 и ИНТАС # 01-2097.

1. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, М.: Физматлит, 2000.
2. M. D. Reid and P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2731 (1988); M. D. Reid, *Phys. Rev.* **A40**, 913 (1989).
3. N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon et al., *Phys. Rev.* **A65**, 052306 (2002); R. Schnabel, W. P. Bowen, N. Treps et al., *Phys. Rev.* **A67**, 012316 (2003).
4. Д. Бауместер, А. Экерт, А. Цайлингер, *Физика квантовой информации*, М.: Постмаркет, 2002.
5. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980.
6. J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
7. S. J. Freedman and J. S. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972).
8. D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony et al., *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990); D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, *Phys. Today* **46**, № 8, 22 (1993).
9. D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell et. al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1345 (1999).
10. J.-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni et. al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4435 (2001).
11. M. Eibl, S. Gaertner, M. Bourennane et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 200403 (2003).
12. N. Korolkova and G. Leuchs, in *Coherence and Statistics of Photons and Atoms*, Eds. J. Peřina, John Wiley and Sons inc., New York, 2001, p. 111.
13. E. Yu. Morozov and A. S. Chirkin, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5**, 233 (2003).
14. А. С. Чиркин, В. В. Волков, Г. Д. Лаптев и др., *Квант. электрон.* **30**, 847 (2000).
15. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, М.: Наука, 1965.
16. J. Wei and E. Norman, *J. Math. Phys.* **4**, 575 (1963).
17. M. J. Collett, *Phys. Rev.* **A38**, 2233 (1988).
18. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
19. А. В. Burlakov, M. V. Chekhova, O. A. Karabutova et al., *Phys. Rev.* **A60**, R4209 (1999); Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, А. Н. Пенин и др., *ЖЭТФ* **124**, 943 (2003).
20. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, М.: Наука, 1981.