

Диссипация потока риплонов на поверхности сверхтекучего ${}^4\text{He}$

А. И. Сафонов¹⁾, С. С. Демух и А. А. Харитонов

Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 февраля 2004 г.

В рамках квантовой гидродинамики поверхности сверхтекучего гелия получена скорость релаксации импульса риплонного газа при $T \lesssim 0.25$ К за счет рождения фонона при поглощении двух риплонов, за счет неупругого рассеяния фонона с поглощением риплона, а также, в случае пленок гелия, за счет не рассматривавшегося ранее механизма одночастичного рассеяния риплонов на неоднородностях уровня поверхности, вызванных шероховатостью подложки. При рассматриваемых температурах вклад неупругого рассеяния фононов пренебрежимо мал. В случае пленки при $T \leq 0.15$ преобладает одночастичное рассеяние, приводящее к температурной зависимости конвективной теплопроводности риплонов вида $K \propto T^{5/3}$. При более высоких температурах определяющим является рождение фонона с поглощением двух риплонов, что дает $K \propto T^{-3}$. Полученные результаты находятся в количественном согласии с известными экспериментальными данными.

PACS: 05.60.Gg, 05.70.Np, 63.20.Ls, 67.40.Pm, 68.03.Kn

Сопротивление гидродинамическому течению газа элементарных возбуждений - риплонов [1] по поверхности сверхтекучего ${}^4\text{He}$ определяет скорость теплопереноса по пленкам гелия при $T \lesssim 0.2$ [2, 3], возможность и условия наблюдения второго поверхностного звука [4], а также играет существенную роль в экспериментах с двумерным атомарным водородом (2D H \downarrow) на поверхности гелия [5, 6]. В настоящей работе вычислено затухание потока риплонов на поверхности объемной жидкости за счет взаимодействия с фононами, а также предложен механизм диссипации потока в случае пленки гелия, покрывающей шероховатую подложку.

Течение риплонного газа по поверхности гелия отдельно от объемной жидкости было рассмотрено теоретически Андреевым и Компанейцем [7] и наблюдалось в экспериментах Манца, Эдвардса и Няяка [2, 3]. Первоначально основная роль в торможении потока риплонов при аннигиляции двух коротковолновых [2, 8] с последующим быстрым затуханием длинноволнового риплона, поле скоростей которого проникает на всю толщину пленки. Впоследствии оказалось, однако, что как теоретическая вероятность такого процесса [9], так и фактическое затухание акустических риплонов [10] весьма малы. Теоретически было установлено, что основными механизмами, определяющими взаимодействие риплонной подсистемы с объемным гелием при рассматриваемых температурах, являются неупругое рассеяние фонона (P)

на поверхности с рождением риплона (R) [8, 9] или аннигиляция двух риплонов с рождением фонона [11]. Далее, Рейнольдс, Сетия и Шляпников [11] показали, что передача энергии от риплонной подсистемы в фононную осуществляется главным образом вторым процессом.

В точности повторяя приведенные в [11] рассуждения, вычислим скорость передачи импульса от риплонной подсистемы в фононную при рождении фонона с волновым вектором (\mathbf{q}, k) с составляющими \mathbf{q} и k соответственно вдоль и поперек поверхности при поглощении двух риплонов с волновыми векторами \mathbf{q}' и \mathbf{q}'' . Температуры риплонов и фононов обозначим T_R и T_P . Частота риплона связана с его волновым вектором известным соотношением $\omega_{q'}^2 = q'^3 \alpha / \rho$ [1], где $\alpha = 0.378$ дин/см и $\rho = 0.145$ г/см³ – поверхностное натяжение и плотность жидкого ${}^4\text{He}$ при $T = 0$. Аналогично для фононов $\omega_{qk} = c\sqrt{q^2 + k^2}$, где $c = 238$ м/с – скорость звука в гелии. В силу законов сохранения энергии и импульса $q \ll q'$ и, следовательно, $\mathbf{q}'' \approx -\mathbf{q}'$. Согласно [11], матричный элемент перехода $R + R \leftrightarrow P$ есть

$$\langle \mathbf{q}k | H | \mathbf{q}'', \mathbf{q}' \rangle \approx \left(\frac{\hbar^3 c^2}{V \rho \omega_{qk}} \right)^{1/2} q' k \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'+\mathbf{q}''}, \quad (1)$$

где V – объем жидкости. Скорость передачи импульса фононам определяется выражением, полностью аналогичным приведенному в [11] для скорости передачи тепла:

¹⁾e-mail: safonov@issph.kiae.ru

$$\begin{aligned} \Pi_{R+R \leftrightarrow P} &= V \frac{2\pi}{\hbar^2} \int \hbar \mathbf{q} |\langle \mathbf{q} \mathbf{k} | H | \mathbf{q}'', \mathbf{q}' \rangle|^2 \times \\ &\times [N_{q'} N_{q''} (1 + n'_{qk}) - n'_{qk} (1 + N_{q'}) (1 + N_{q''})] \times \\ &\times \delta(\omega_{q'} + \omega_{q''} - \omega_{qk}) \frac{d^2 q' d^2 q dk}{(2\pi)^5}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $N_{q'}(T_R)$, $N_{q''}(T_R)$ и $n'_{qk}(T_P)$ – равновесные числа заполнения соответственно для риплонов и фононов в системе отсчета, связанной с риплонами. Чтобы не учитывать одни и те же пары риплонов (\mathbf{q}' , \mathbf{q}'') дважды, интегрирование по q' ведется лишь по половине импульсного пространства.

Пусть риплоны движутся относительно объемной жидкости со скоростью \mathbf{u} , малой по сравнению со скоростью звука. Тогда в системе отсчета, связанной с риплонами, числа заполнения фононов имеют вид $n'_{qk} \equiv n'(\omega_{qk}) = n(\omega_{qk} - \mathbf{u} \mathbf{q})$, где n – числа заполнения в неподвижной системе отсчета. Разлагая n' в ряд и обрывая разложение на линейном члене (поскольку $|\mathbf{u} \mathbf{q}| \ll c q \leq \omega_{qk}$), получим $n'_{qk} \approx n_{qk} - \mathbf{u} \mathbf{q} (dn_{qk}/d\omega_{qk})$. В силу симметрии все члены в (2), пропорциональные \mathbf{q} , при интегрировании обращаются в нуль, а $\mathbf{q}(\mathbf{u} \mathbf{q})$ может быть заменено на $\mathbf{u} q^2/2$. Кроме того, $\omega_{q'} \approx \omega_{q''} \approx \frac{1}{2} \omega_{qk}$ и $N_{q'} \approx N_{q''}$. Последующие вычисления приводят к

$$\begin{aligned} \Pi_{R+R \leftrightarrow P} &= \frac{16}{45\pi^2} \frac{\mathbf{u}}{c} \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{4/3} \frac{\hbar^2}{\rho c^4} \left(\frac{T_P}{\hbar}\right)^{20/3} \times \\ &\times \int_0^\infty x^{20/3} dx \left[\frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \left(\frac{e^{\beta x} + 1}{e^{\beta x} - 1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом выражении $\beta = T_P/T_R$. Подстановка численных значений дает

$$\Pi_{R+R \leftrightarrow P} = \left(1.33 \cdot 10^{-4} \frac{\Gamma}{\text{см}^3 \text{К}^{20/3}}\right) \mathbf{u} T_P^{20/3} F(\beta), \quad (4)$$

где $F(\beta)$ обозначает фигурирующий в (3) интеграл. При малых β , то есть при $T_P \ll T_R$, его вычисление дает $F(\beta) \approx 7.91/\beta$, тогда как в противоположном предельном случае, $\beta \gg 1$, он обращается в константу $F \approx 12.9$. Если же температуры двух подсистем совпадают, значение интеграла есть $F(1) \approx 14.3$.

Обратимся теперь к процессу неупругого рассеяния фононов $P(\mathbf{q} \mathbf{k}) \leftrightarrow P(\mathbf{q}' \mathbf{k}') + R(\mathbf{Q})$. Нетрудно видеть, что в этом случае в силу кинематических соотношений [8] частота риплона ω_Q мала по сравнению с частотами фононов ω_{qk} и $\omega_{q'k'}$, тогда как векторы q , q' и Q , вообще говоря, сопоставимы. Следовательно, $\hbar \omega_Q \ll T_P$, поскольку основной вклад в передачу импульса, очевидно, вносят фононы с энергиями $\lesssim T_P$ (температуры фононов и риплонов будем считать сопоставимыми). Согласно подтвержденным экспериментально [10] расчетам Роша, Роже и Уильямса [9],

обратное время затухания акустического риплона за счет неупругого рассеяния фононов есть

$$\frac{1}{\tau_Q} \approx \frac{\pi^2 \hbar Q}{60 \rho} \left(\frac{T_P}{\hbar c}\right)^4. \quad (5)$$

По аналогии с (2) скорость передачи импульса может быть оценена путем интегрирования

$$\Pi_{P \leftrightarrow P+R} = \int \frac{\hbar \mathbf{Q}}{\tau_Q} N'_Q \frac{d^2 Q}{(2\pi)^2} \quad (6)$$

со смещенной функцией распределения риплонов $N'(\omega_Q) = N(\omega_Q - \mathbf{u} \mathbf{Q}) \approx N_Q + \mathbf{u} \mathbf{Q} (T/\hbar \omega_Q^2)$, причем интегрирование производится до $Q \sim q_T = T_P/\hbar c$, где q_T – волновой вектор теплового фонона. В итоге получим

$$\Pi_{P \leftrightarrow P+R} \sim \frac{\pi}{480} \frac{\mathbf{u} \hbar c}{c \alpha} \left(\frac{T_P}{\hbar c}\right)^6 T_R, \quad (7)$$

то есть

$$\Pi_{P \leftrightarrow P+R} \sim \left(7.1 \cdot 10^{-5} \frac{\Gamma}{\text{см}^3 \text{К}^7}\right) \mathbf{u} T_P^6 T_R, \quad (8)$$

что при рассматриваемых температурах $T \lesssim 0.2 \text{ К}$ на несколько порядков меньше значения, полученного для процесса $R + R \leftrightarrow P$. Таким образом, характерное время передачи импульса от риплонной подсистемы в фононную есть, очевидно,

$$\tau_R \approx \frac{\rho_R \mathbf{u}}{\Pi_{R+R \leftrightarrow P}} \approx \frac{1.26 \cdot 10^{-7} \text{ с К}^5}{T_P^5 \beta^{5/3} F(\beta)}, \quad (9)$$

где $\rho_R = 1.67 \cdot 10^{-10} T_R^{5/3} (\text{г/см}^2) \text{К}^{-5/3}$ – связанная с риплонами массовая плотность.

Экспериментально измеряемой величиной является, например, конвективная теплопроводность за счет теплопереноса гидродинамическим потоком риплонов [2]:

$$K_R = T S_R^2 \frac{\tau_R}{\rho_R}, \quad (10)$$

где $S_R = 1.52 \cdot 10^{-2} T^{4/3} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \text{К}^{-7/3}$ – энтропия риплонного газа. Отсюда видно, что если торможение риплонов определяется процессом $R + R \leftrightarrow P$, то величина K_R должна убывать с ростом температуры как T^{-3} . Однако в экспериментах Манца, Эдвардса и Наяка [2] наблюдалась совершенно иная картина (рис.1): теплопроводность возрастала с температурой вплоть до $T \simeq 0.15 \text{ К}$, после чего выходила на насыщение и даже несколько снижалась. Такое различие может объясняться существованием в случае пленки гелия другого, более эффективного механизма торможения риплонов. Из экспериментальной

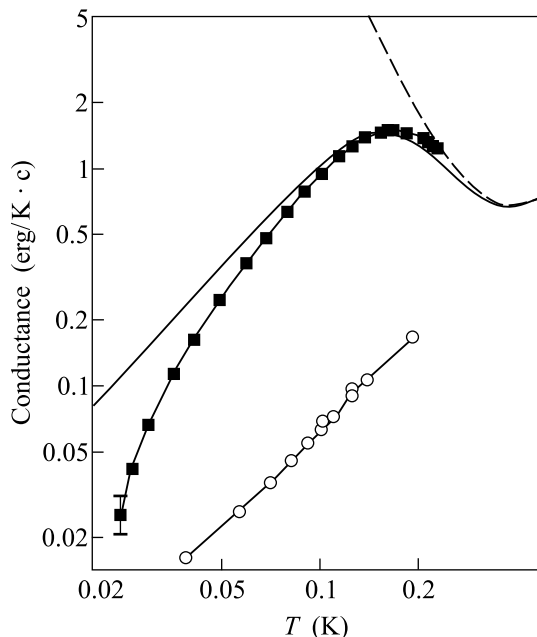


Рис.1. Конвективная теплопроводность риплонов на поверхности пленки ${}^4\text{He}$ согласно (16) для $H = 6$ см и $l = 2.9$ мкм (сплошная кривая) и экспериментальные результаты Манца и др.[2] (■). Расчетная зависимость учитывает экспериментально измеренную теплопроводность подложки (светлые точки). Штриховой кривой показана теплопроводность риплонов, ограниченная лишь взаимодействием с фононами гелия

температурной зависимости теплопроводности следует, что при низких температурах характерное время релаксации импульса риплонов слабо зависит от температуры. Это позволяет исключить многочастичные процессы, такие, как, например, прямое взаимодействие риплонов с фононами подложки, и ограничиться поиском механизмов, определяющих конечное время жизни отдельного риплона.

Мы предполагаем, что затухание риплона может быть связано с рассеянием на неоднородностях поверхности пленки, вызванных шероховатостью подложки (рис.2а). Так как распространение риплонов не связано с ориентацией поверхности, причиной рассеяния может быть лишь меняющаяся вдоль поверхности кривизна $K(\mathbf{r})$. Вызывающий рассеяние риплона эффективный потенциал (рис.2б) легко найти из соображений размерности: $V(\mathbf{r}) \sim \hbar(\alpha/\rho)^{1/2}|K(\mathbf{r})|^{3/2}$. Пленка, покрывающая шероховатую поверхность, благодаря капиллярному эффекту затягивает углубления между пиками подложки, образуя мениски с кривизной $K_m = \rho g H / \alpha \sim 10^3 \text{ см}^{-1}$, где $H \sim 1$ см – высота над уровнем объемной жидкости. На самих же пиках кривизна по порядку величины совпадает с обратной тол-

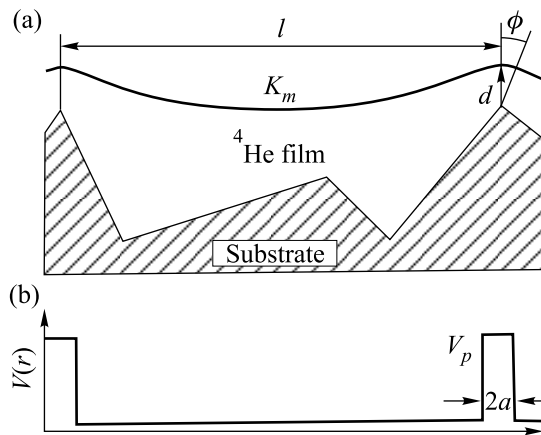


Рис.2. (а) Профиль поверхности подложки и покрывающей ее пленки гелия. (б) Эффективный потенциал, вызванный кривизной поверхности и приводящий к рассеянию риплонов

щиной пленки, $K_p \simeq 2/d \simeq 6 \cdot 10^5 H^{1/3} \text{ см}^{-1}$ (высота H выражена в сантиметрах). Количество пиков на единице поверхности $\sim 1/l^2$ определяется масштабом шероховатости l . Так как постоянная составляющая эффективного потенциала не приводит к рассеянию, и $K_p \gg K_m$, эффективный потенциал $V(\mathbf{r})$ можно заменить на величину, обращающуюся в нуль везде, за исключением окрестностей пиков, где она в силу связи потенциала с кривизной, равна $V_p \sim \hbar(\alpha/\rho)^{1/2} d^{-3/2}$. Размер окрестности a определяется углом наклона поверхности пленки вблизи пика $\phi = K_m l / 4$ и составляет $a = \phi d \simeq 10^{-7} \text{ см}$ при $l = 1$ мкм. Таким образом, мы имеем сравнительно редко расположенные центры рассеяния, каждый из которых можно рассматривать отдельно.

Заметим, что K_p мало по сравнению с волновым вектором $q_T = (\rho/\alpha)^{1/3}(T/\hbar)^{2/3} \sim 3 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ типичного риплона, и в то же время $q_T a \simeq 0.3$. Это позволяет воспользоваться борновским приближением для случая медленных частиц, которое, как известно, дает изотропное рассеяние. Сечение рассеяния риплона с волновым вектором \mathbf{q} получается из стандартного выражения [12] для двумерного случая подстановкой эффективной массы риплона согласно определению $1/m = \partial E_q / \partial(q^2) = \frac{3}{4} \hbar(\alpha/\rho)^{1/2} q^{-1/2}$ и не зависит от q :

$$\sigma \simeq \frac{4}{9\hbar^2} \left(\frac{\rho}{\alpha}\right) \left| \int V(\mathbf{r}) d^2 r \right|^2 \simeq \frac{4\pi^2 V_p^2 a^4}{9\hbar^2} \left(\frac{\rho}{\alpha}\right), \quad (11)$$

или, с учетом вида V_p и a ,

$$\sigma \sim \frac{32\phi^4 \pi^2}{9} d. \quad (12)$$

Длина свободного пробега риплона есть, как обычно, $\lambda = l^2/\sigma$, а обратное время релаксации проекции импульса на первоначальное направление τ_q находится из соотношения $\tau_q\omega_q = q\lambda$.

Скорость передачи импульса риплонов в подложку вычисляется по аналогии с (6):

$$\Pi_V = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{\hbar u q^2}{\tau_q} \left| \frac{dN_\omega}{d\omega_q} \right|. \quad (13)$$

Интегрирование по q и подстановка ϕ дают

$$\Pi_V \sim 0.14 \frac{T_R^2 u}{\hbar} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^5 (gH)^4 l^2 d. \quad (14)$$

Время передачи импульса риплонов в подложку составляет соответственно

$$\tau_R \approx \frac{\rho_R u}{\Pi_V} \approx \frac{8 \cdot 10^{-15} \text{ К}^{1/3} \text{ см}^7 \text{ с}}{T_R^{1/3} H^4 l^2 d}. \quad (15)$$

Таким образом, при низких температурах теплопроводность оказывается пропорциональной $T^{5/3}$, в полном согласии с экспериментально наблюдаемой зависимостью.

При одновременном действии нескольких механизмов скорости релаксации импульса складываются, поэтому итоговое выражение для теплопроводности пленки при $T_P = T_R = T$ имеет вид

$$K \approx \left(83T^3 + \frac{9 \cdot 10^7}{T^{5/3}} H^4 l^2 d \right)^{-1} [\text{эрг/смК}]. \quad (16)$$

В (16) температура выражена в К, а масштаб шероховатости l в см. На рис.1 представлена температурная зависимость K_R для $H = 6$ см и $l = 2.9$ мкм (сплошная кривая). Согласие с экспериментом [2] (■) выглядит достаточно убедительно, тем более, что все вычисления были выполнены исходя из первых принципов, а значение единственного подгоночного параметра – масштаба шероховатости подложки l – с точки зрения условий эксперимента представляется вполне правдоподобным. При расчете учитывалась измеренная в эксперименте теплопроводность подложки – покрытой слоем твердого неона майларовой пленки. Для сравнения на рис.1 штриховой кривой показана конвективная теплопроводность риплонов, ограниченная лишь взаимодействием с фононами жидкости (процесс $R + R \leftrightarrow P$), что отвечает поверхности объемного гелия.

Как известно, равновесная толщина пленки d связана с высотой над уровнем объемной жидкости соотношением $d \approx 3 \cdot 10^{-6} H^{-1/3}$, в котором обе величины выражены в см. Поэтому наблюдавшуюся Манцем и

др. [3] зависимость K от толщины пленки можно качественно объяснить, формально заменив в (16) высоту H на $(3 \cdot 10^{-6}/d)^3$. Следует также отметить, что зависимость времени релаксации импульса от масштаба шероховатости подложки и высоты пленки над объемной жидкостью может быть причиной того, что в экспериментах с двумерным атомарным водородом [6] наблюдались значительно более короткие времена, чем в экспериментах Манца и др. [2, 3]

В заключение остановимся на правомерности использования понятия температуры риплонов. Вопрос заключается в соотношении скоростей установления равновесия внутри риплонной системы и нарушения этого равновесия при взаимодействии с фононами (одночастичное упругое рассеяние риплонов на неоднородностях поверхности функции распределения не меняет). Характерное время теплотransдачи от риплонов в фононы, определяемое, главным образом, процессом $R + R \leftrightarrow P$, можно оценить как $\tau_{rp} \sim R_{rp} C_R = 3 \cdot 10^{-10} T^{-13/3} \text{ К}^{13/3} \cdot \text{с}$, где $C_R = 1.52 \cdot 10^{-2} T^{4/3} \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-7/3} \cdot \text{см}^{-2}$ – совпадающая с энтропией теплоемкость риплонов, а $R_{rp} = 1.8 \cdot 10^{-8} T^{-17/3} \text{ К}^{20/3} \text{ см}^2/\text{эрг}$ – тепловое сопротивление между риплонной и фононной подсистемами [11]. Несложно показать, что в отсутствие внешнего теплотокa и эффективных механизмов релаксации внутри риплонной системы указанный процесс формирует тепловое распределение риплонов с температурой, равной температуре фононов (фононная система предполагается находящейся в равновесии). Такая ситуация реализуется, например, при измерении температурной зависимости поверхностного натяжения чистого ^4He [13], а также при измерении теплопроводности пленок гелия [2]. В экспериментах же с атомарным водородом [5] время установления теплового равновесия в двумерной системе определяется рассеянием риплонов на адсорбированных на поверхности гелия атомах Н [14]. При характерной плотности последних $\sim 10^{12} \text{ см}^{-2}$ и температуре $T \lesssim 100 \text{ мК}$ это время составляет $\tau_2 \sim 60 \text{ нс}$, что на два порядка короче времени передачи тепла от риплонов в фононы. Таким образом, и в этом случае двумерная система находится в тепловом равновесии, но может обладать температурой, отличной от температуры фононов.

Авторы признательны Л. А. Максимуму за плодотворные обсуждения, а также И. И. Лукашевичу за поддержку и внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 02-02-16652-а) и INTAS (грант # 2001-0552).

1. K. R. Atkins, *Can. J. Phys.* **31**, 1165 (1953).
2. I. B. Mantz, D. O. Edwards, and V. U. Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 66 (1980); Errata **44**, 1094 (1980).
3. I. B. Mantz, D. O. Edwards, and V. U. Nayak, *J. de Physique (Paris), Colloque* **39**, C6-300 (1978).
4. W. M. Saslow and A. A. Kumar, *Phys. Rev.* **B30**, 6402 (1984).
5. S. A. Vasilyev, J. Järvinen, A. I. Safonov, and S. Jaakkola, to appear in *Phys. Rev.* **A69**, 023610 (2004).
6. Недавно в экспериментах по тепловому сжатию $2D\ H\downarrow$ с участием авторов настоящей работы наблюдалось течение газа атомов H по поверхности пленки гелия. Ключевыми величинами в описании такого течения являются времена передачи импульса от водородной подсистемы риплонам и от риплонов в подложку. Материал готовится к публикации.
7. А. Ф. Андреев, Д. А. Компанец, *ЖЭТФ* **61**, 2459 (1972).
8. W. F. Saam, *Phys. Rev.* **A8**, 1918 (1973).
9. P. Roche, M. Roger, and F. I. B. Williams, *Phys. Rev.* **B53**, 2225 (1996).
10. P. Roche, G. Deville, K. O. Keshishev et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3316 (1995).
11. M. W. Reynolds, I. D. Setija, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev.* **B46**, 575 (1992).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Теоретическая физика. III. Квантовая механика*, М.: Наука, 1989, стр. 602.
13. D. O. Edwards and W. F. Saam, in *Progress in Low Temperature Physics*, Ed. D. F. Brewer, North Holland Publ. Co., Vol. VIIA, 1978, p. 283.
14. D. S. Zimmerman and A. J. Berlinsky, *Can. J. Phys.* **61**, 508 (1983).