

Кулоновское уширение нелинейных резонансов в поле сильной стоячей волны

О. В. Белай, Д. А. Шапиро¹⁾

Институт автоматики и электрометрии СО РАН
630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 13 января 2004 г.

После переработки 26 января 2004 г.

Рассмотрена задача о спектре пробного поля для трехуровневого иона, помещенного в поле сильной стоячей световой волны. Взаимодействие иона с плазмой, кулоновское рассеяние с изменением скорости, учитывалось в рамках модели слабых столкновений. Система кинетических уравнений на матрицу плотности решалась при помощи разложения по пространственным гармоникам и собственным функциям столкновительного оператора. Найден профиль нелинейной добавки к поглощению пробной волны при различных значениях эффективной частоты ион-ионных столкновений, амплитуды и частоты стоячей волны. Показано что уширение центральной нелинейной структуры в спектре обусловлено эффектом кулоновской дефазировки. Результаты расчета находятся в качественном согласии с полученными ранее экспериментальными данными.

PACS: 34.50.-s, 42.50.-p

Поведение двухуровневой атомной системы в поле сильной стоячей световой волны не сводится к взаимодействию с двумя встречными бегущими волнами по отдельности. Только в пределе слабо насыщающего поля бегущие волны можно рассматривать независимо, а при увеличении амплитуды поля необходимо принимать во внимание высшие пространственные гармоники (ВПГ). В населенностях уровней проявляются четные гармоники, а в когерентности (недиагональном элементе атомной матрицы плотности) – нечетные гармоники. В распределении когерентности по скоростям возникают так называемые "1/n-резонансы" на скоростях $u = \Delta/kn$, где Δ – расстройка сильного поля относительно частоты перехода, \mathbf{k} – волновой вектор, u – проекция скорости \mathbf{v} на волновой вектор, n – нечетное число. В простейшем случае равных релаксационных констант и $\Delta = 0$ распределение по скоростям сводится к функции Бесселя $J_0(G/ku)$ [1], где G – рабиевская частота. Впрочем, при расчете провала Лэмба ВПГ качественно не меняют профиль и приводят лишь к небольшим количественным изменениям порядка 10% [2], то есть эффекты ВПГ нивелируются после усреднения по скоростям и практически ненаблюдаемы.

Если добавить пробное поле на смежном переходе и перейти к трехуровневой системе, некоторые эффекты ВПГ отчетливо проявляются в спектре [3, 4]. Другой способ их наблюдения – это две встречные

бегущие волны, амплитуду одной из которых можно перестраивать. Эксперимент в такой схеме демонстрирует особенность при близких амплитудах волн [5, 6]. Эксперимент в схеме пробного поля на ионах Ar^+ [7, 8] показал, что когда пробное поле связывает двухуровневую систему с метастабильным состоянием, ВПГ проявляются в резонансном случае в виде провала в центре контура нелинейного пропускания. При отстройке от резонанса провал превращается в пик, положение которого не зависит от расстройки. Расчет, выполненный по формулам Фелдмана–Фелда [3] без учета столкновений с изменением скорости, давал правильное положение провала и пика. Однако в эксперименте резонанс получился шире, чем в теории. В работе [7] высказывалось предположение, что наблюдаемое уширение – следствие кулоновского ион-ионного рассеяния с изменением скорости. Однако теория эффекта столкновений для поля стоячей волны отсутствовала в силу сложности задачи. Эффекты столкновений с изменением скорости в схеме пробного поля в Λ -конфигурации даже для сильной бегущей волны рассчитаны сравнительно недавно [9, 10].

Цель настоящей работы – расчет эффектов уширения ВПГ-резонансов вследствие кулоновских столкновений. Последние можно учесть в модели слабых столкновений, поскольку в плазме доминирует рассеяние ионов на малые углы. Ниже обсуждается, как найти профиль нелинейного резонанса в виде бесконечной матричной цепной дроби, представлены ре-

¹⁾e-mail: shapiro@iae.nsk.su

зультаты численного расчета и приведено качественное объяснение наблюдаемого уширения.

Рассмотрим трехуровневую систему $n - m - l$, рис.1, на переходах которой приложены поля силь-

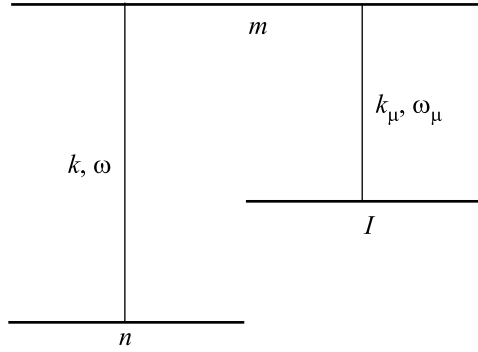


Рис.1. Трехуровневая система

ной стоячей волны $E(\mathbf{r}, t) = 2Ee^{-i\omega t} \cos \mathbf{k}\mathbf{r} + \text{к.с.}$ и пробной бегущей $E_\mu(\mathbf{r}, t) = E_\mu e^{-i\omega_\mu t + ik_\mu \mathbf{r}} + \text{к.с.}$ Когерентности разрешенного перехода $\rho_{ml} = \rho_a e^{-i\Delta_\mu t}$ и запрещенного перехода $\rho_{nl} = \rho_f e^{-i(\Delta_\mu - \Delta)t}$ подчиняются системе двух связанных уравнений

$$\begin{aligned} (\Gamma + u\partial_x) \rho_a + iG \cos kx \rho_f &= \hat{S}\rho_a + iG_\mu N_l(u), \\ iG \cos kx \rho_a + (\gamma + u\partial_x) \rho_f &= \hat{S}\rho_f, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = \mathbf{k}\mathbf{v}/k$, $x = \mathbf{k}\mathbf{r}/k$, $\Delta = \omega - \omega_{mn}$, $\Delta_\mu = \omega_\mu - \omega_{ml}$ – расстройки сильного и пробного полей относительно частот соответствующих переходов, N_l – населенность уровня l , $\Gamma = \Gamma_{ml} - i\Delta_\mu$, $\gamma = \Gamma_{nl} + i(\Delta - \Delta_\mu)$, а рабиевские частоты $G = Ed_{mn}/2\hbar$, $G_\mu = E_\mu d_{ml}/2\hbar$, пропорциональные амплитудам полей, выбраны действительными. Кулоновские столкновения описываются фоккер-планковским оператором [11]

$$\hat{S} = \nu \left(\frac{v_T^2}{2} \partial_u^2 + \partial_u u \right), \quad (2)$$

где ν – эффективная частота ион-ионных столкновений, v_T – тепловая скорость ионов. Волновые векторы сильной и пробной волн полагаются коллинеарными. В правой части второго уравнения (1) опущен член с ρ_{mn} , описывающий нелинейные интерференционные эффекты. Такое пренебрежение упрощает формулы и соответствует эксперименту, где населенности уровней m, n значительно меньше населенности метастабильного уровня l .

Если разложить неизвестные когерентности ρ_a, ρ_f как периодические функции x в ряд Фурье по пространственным гармоникам, то из (1) видно, что отличными от нуля будут только коэффициенты при четных гармониках $n = 2l$ когерентности

разрешенного перехода и при нечетных гармониках $n = 2l + 1$ – когерентности запрещенного перехода

$$\begin{aligned} \rho_a &= e^{ik_\mu x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{2l} \exp(i2lkx), \\ \rho_f &= e^{ik_\mu x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{2l+1} \exp(i(2l+1)kx). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем новый набор функций $x_n(u)$, которые при четных n совпадают с a_n , а при нечетных с f_n . Тогда из (1) получим бесконечную цепочку связанных уравнений Фоккера–Планка

$$A_n x_n + \frac{iG}{2} (x_{n+1} + x_{n-1}) = \delta_{n0} W_M(u) + \hat{S}x_n, \quad (4)$$

$$n = 0, \pm 1, \dots,$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, $W_M(u) = \exp(-u^2/v_T^2)/v_T\sqrt{\pi}$ – одномерное максвелловское распределение по скоростям. Здесь

$$A_n = \Gamma_n + i(k_\mu + kn)u, \quad \Gamma_n = \begin{cases} \Gamma, & n = 2l, \\ \gamma, & n = 2l + 1, \end{cases} \quad (5)$$

а поглощение пробного поля определяется нулевым коэффициентом $\mathcal{P}_\mu(\Delta_\mu) \propto G_\mu^2 \text{Re} \int a_0 du$, проинтегрированным по скоростям. Чтобы перейти от системы дифференциальных уравнений к разностному уравнению, разложим величины x_n по полной системе нормированных собственных функций

$$\begin{aligned} x_n(u) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \psi_m(u), \\ \psi_m(u) &= \frac{H_m(u/v_T) \exp(-u^2/v_T^2)}{\sqrt{2^m m!}} \end{aligned} \quad (6)$$

столкновительного оператора $\hat{S}\psi_m = m\psi_m$, $m = 0, 1, \dots$. Здесь H_m – полиномы Эрмита. Получается линейное разностное уравнение

$$\begin{aligned} i(k_\mu + kn)v_T \left[\sqrt{\frac{m}{2}} a_{n,m-1} + \sqrt{\frac{m+1}{2}} a_{n,m+1} \right] + \\ (\Gamma_n + \nu m) a_{nm} + i\frac{G}{2} (a_{n+1,m} + a_{n-1,m}) = \frac{\delta_{n0} \delta_{m0}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Надо найти коэффициент a_{00} , через который выражается работа поля $\mathcal{P}_\mu \propto G_\mu^2 \text{Re} a_{00}$. Уравнение (7) связывает коэффициент разложения a_{nm} с двумя соседними коэффициентами по m и двумя соседними по n , другими словами, получилась бесконечная система линейных уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей, каждый блок которой также трехдиагональная матрица. Если воспользоваться такой струк-

турой матрицы, ответ удается записать в виде бесконечной матричной цепной дроби:

$$\mathcal{P}_\mu(\Delta_\mu) \propto \text{Re} x_0, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (UR_0^{-1} + V)_{00}^{-1}, \quad (8)$$

$$R_{m-1} = \alpha_m R_m^{-1} + \beta_m,$$

где

$$(\alpha_m)_{lj} = -\sqrt{\frac{m+1}{m}} \delta_{lj},$$

$$(\beta_m)_{lj} = -\sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\frac{G}{2}(\delta_{j,l-1} + \delta_{j,l+1}) - i(\Gamma_m + m\nu)\delta_{lj}}{k_\mu + lk}, \quad (9)$$

$$U_{nj} = \frac{i}{\sqrt{2}}(k_\mu + kn)\delta_{nj},$$

$$V_{nj} = \Gamma_n \delta_{nj} + i\frac{G}{2}(\delta_{j,n+1} + \delta_{j,n-1}), \quad (10)$$

а $(\dots)_{ij}$ обозначает ij -й матричный элемент. Матрицы α_m и β_m получились диагональными и трехдиагональными, соответственно.

Нелинейная добавка к работе пробного поля

$$\delta\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu|_{G=0} - \mathcal{P}_\mu \quad (11)$$

находилась численно и приведена на рис.2-4 в

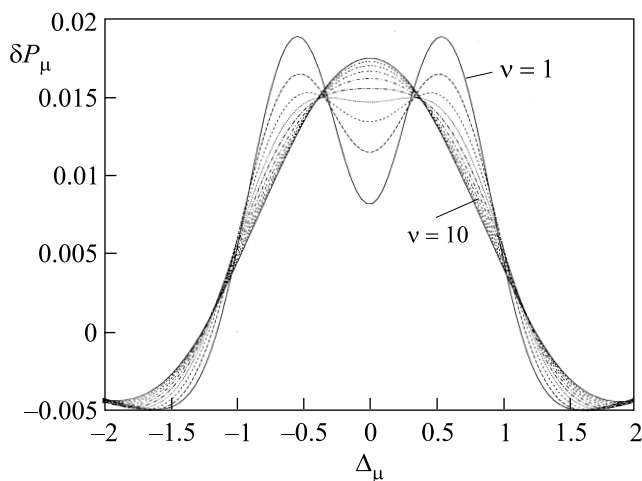


Рис.2. Нелинейная добавка к спектру пробного поля при $\Delta = 0, k = 16.6, k_\mu = 11.8, G = 1.2, \Gamma_{ml} = 0.09$ и различных $\nu = (1 \div 10) \cdot 10^{-3}$, соответственно

произвольных единицах в зависимости от отстройки пробного поля. Матрицы R_m в формуле (8) обращались на каждом шаге методом вращений, оптимальные свойства которого рассмотрены в [12]. Максимальные значения $M = \max m$ и $N = \max |n|$ удваивались до тех пор, пока не достигалась заданная относительная погрешность, которая на приведенных рис.2-4 составляла 10^{-4} . Количество существенных

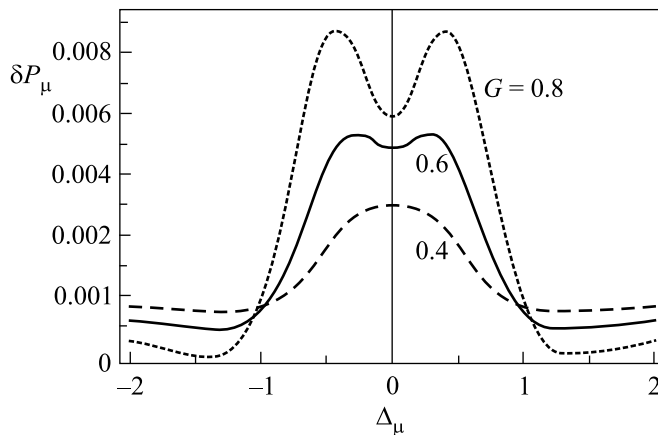


Рис.3. Нелинейная добавка к работе пробного поля при $\Gamma_{ml} = 0.06, G = 0.8, kv_T = 18, k_\mu v_T = 13, \nu = 10^{-3}, \Delta = 0$, значения G указаны около кривых

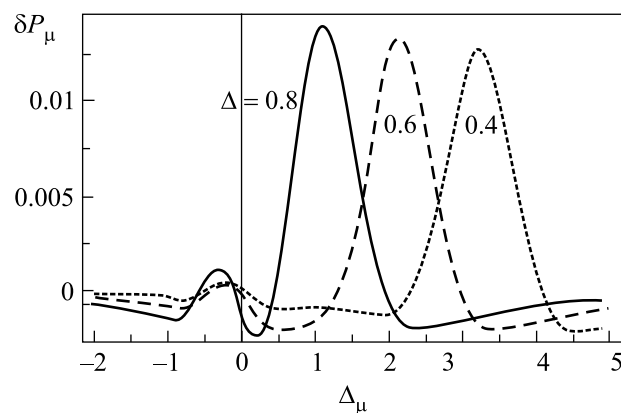


Рис.4. То же, что и на рис.3 при $G = 0.8$ и трех разных значениях Δ (указаны около кривых)

пространственных гармоник N возрастало с рабиевской частотой сильного поля G , а число необходимых для обеспечения точности полиномов Эрмита M уменьшалось с ростом частоты столкновений ν . При использованных в расчете параметрах граничные значения составляли $N \sim 10^2, M \sim 10^4$. Такое поведение соответствует качественной картине явления. Если подставить ρ_a в виде ряда по степеням G в уравнение (1), то при G^2 появится $\cos 2kx$, при G^4 — $\cos 4kx$ и т.д. Значит, по мере уменьшения G все меньше пространственных гармоник вносит вклад в работу поля. Диффузия в пространстве скоростей, которая описывается фоккер-планковским оператором, в первую очередь сглаживает изрезанные функции, которые соответствуют полиномам Эрмита с большими m .

Зависимость нелинейной добавки от эффективной частоты столкновений приведена на рис.2, номер

кривой, умноженный на 10^{-3} , дает значение ν/Γ_{nl} . Здесь и далее все величины размерности частоты приведены в единицах Γ_{nl} . Видно, как уширяется ВПГ-провал в центре контура с увеличением частоты ν . При $\nu/\Gamma_{nl} > 4 \cdot 10^{-3}$ провал полностью размывается. Параметры для численного расчета выбраны близкими к экспериментальным. На рис.3 и 4 спектры изображены при нескольких значениях рабиевской частоты и нескольких расстройках сильного поля, соответственно. Из рис.3 видно, что в резонансном случае провал в центре контура становится глубже с ростом амплитуды сильного поля. Рис.4 демонстрирует, как с увеличением отстройки сильного поля провал превращается в пик, положение которого перестает зависеть от расстройки Δ . В отличие от расчета [7] по формулам Фелдмана–Фелда ВПГ-резонанс получился уширенным.

Качественно можно объяснить наблюдаемое уширение эффектом кулоновской дефазировки, который для бегущей волны кратко обсуждался в работах [11, 9]. Рассмотрим группу ионов с нулевой проекцией скорости u на направление волнового вектора и изобразим ее на фазовой плоскости $(kx, u/v_T)$. Через некоторое время из-за кулоновской диффузии в пространстве скоростей ионы приобретут положительные или отрицательные скорости и точка в начале координат фазовой плоскости превратится в отрезок, вытянутый вдоль оси u . Ионы с положительной скоростью начнут смещаться по фазовой плоскости направо, а ионы с отрицательной скоростью – налево. Отрезок превратится в эллипс с увеличивающимися размерами, вращающийся по часовой стрелке и показанный для нескольких моментов времени t на рис.5. С математической точки зрения изображен-

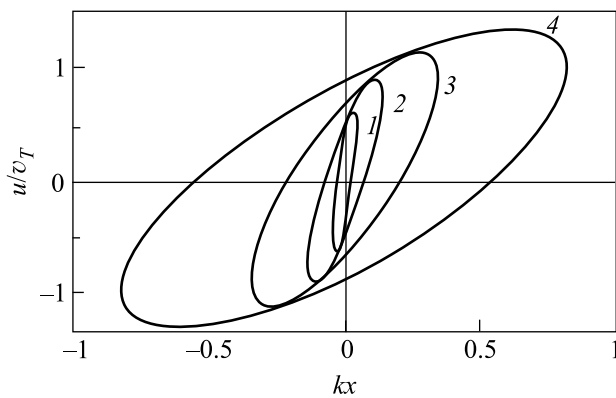


Рис.5. Форма облака частиц на фазовой плоскости при $\nu t = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0$ (кривые 1 ÷ 4, соответственно)

ные эллипсы являются линиями уровня недиагональной функции Грина модели слабых столкновений [13]:

$$\Phi(x, u, t) = \exp\left(-\frac{c\tilde{x}^2 - 2b\tilde{x}\tilde{u} + a\tilde{u}^2}{2(ac - b^2)}\right),$$

$$\tilde{x} = kx, \quad \tilde{u} = \frac{u}{v_T}, \quad a = 2\left(\nu t - h - \frac{h^2}{2}\right),$$

$$b = h^2, \quad c = 1 - e^{-2\nu t}, \quad h = 1 - e^{-\nu t}. \quad (12)$$

Когда горизонтальные габариты эллипса превысят λ/n , где $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны, а n – номер пространственной гармоники, тогда эффект данной гармоники “замоется”. Уширение по вертикали происходит при $\nu t \ll 1$ по диффузионному закону $\delta u/v_T = (\nu t)^{1/2}$. Приравнивая уширение за счет движения по горизонтали $\delta x = \delta u t = \nu^{1/2} t^{3/2} v_T$ к длине волны n -й пространственной гармоники λ/n , получаем оценку уширения $\delta\omega \sim (\nu v_T^2 k^2)^{1/3} n^{2/3}$. При экспериментальных параметрах $\nu = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$, $v_T = 2 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$, $n \sim 2$ получаем $\delta\omega \sim 2 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ или 300 МГц.

В эксперименте по изучению электромагнитно-индуцированной прозрачности в Λ -конфигурации [7] в качестве конечного состояния выбиралась метастабиль $\text{ArII } |l\rangle = 3d^2P_{3/2}$, а начальным и промежуточными состояниями были более широкие уровни $|n\rangle = 4s^2P_{3/2}$, $|m\rangle = 4p^2S_{1/2}$. Измеренная ширина провала в центре контура при настройке стоячей волны в резонанс с переходом $n - m$ составляла 150–200 МГц, тогда как теория возмущений дает $2\Gamma_{ml}$. Невозмущенная ширина резонанса равна $\Gamma_{ml}^0 = \frac{1}{2}(\Gamma_m + \Gamma_l) = 20 \text{ МГц}$. Штарковское уширение на переходе $m - l$ неизвестно, однако по другим аналогичным линиям можно оценить его сверху: $\Delta\Gamma_{ml} \lesssim 30 \text{ МГц}$, тогда $2\Gamma_{ml} \lesssim 100 \text{ МГц}$. Значит, уширение в эксперименте по крайней мере в 1.5–2 раза больше, чем дает теория, не учитывающая столкновений с изменением скорости. Когда стоячая волна отстроена от резонанса, вместо провала наблюдался уширенный пик в центре спектра пробного поля. Уширение по сравнению с теорией возмущений и формулами Фелдмана–Фелда также было в 1.5–2 раза больше. Приведенная выше оценка уширения из-за кулоновской дефазировки согласуется по порядку величины с экспериментальным значением как для центрального провала в резонансном случае (рис.3), так и для уширенного пика (рис.4) вдали от резонанса.

Таким образом, численный расчет матричной цепной дроби показывает, что контрастность ВПГ-резонанса увеличивается с амплитудой G и уменьшается с расстройкой сильного поля Δ . Установлено, что уширение ВПГ-резонанса обусловлено кулоновской дефазировкой, а количественные результаты согласуются по порядку величины с экспериментом.

Авторы признательны С.А. Бабину, Е.В. Подивиллову и М.Г. Степанову за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 02-02-39025) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант # НШ-439.2003.2).

1. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, *ЖЭТФ* **44**, 934 (1963) [*Sov. Phys. JETP* **17**, 635 (1963)].
2. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Новосибирск, Наука, 1979.
3. В. J. Feldman and M. S. Feld, *Phys. Rev.* **A5**, 899 (1972).
4. S. Stenholm, *Phys. Rep.* **43**, 151 (1978).
5. А. М. Бонч-Бруевич, Т. А. Варганян, Н. А. Чигирь, *ЖЭТФ* **77**, 1899 (1979).
6. Ан. М. Мак, С. Г. Пржибельский, Н. А. Чигирь, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **47**, 1976 (1983).
7. С. А. Бабин, Е. В. Подивиллов, В. В. Потапов и др., *ЖЭТФ* **121**, 807 (2002) [*JETP*, **94**, 694 (2002)].
8. S. A. Babin, D. V. Churkin, E. V. Podivilov et al., *Phys. Rev.* **A67**, 043808 (2003).
9. M. G. Stepanov and D. A. Shapiro, *Письма в ЖЭТФ* **68**, 27 (1998) [*JETP Lett.* **68**, 29 (1998)].
10. Yu. I. Belousov and D. A. Shapiro, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36**, 1495 (2003).
11. S. A. Babin and D. A. Shapiro, *Phys. Rep.* **241**, 119 (1994).
12. С. К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Новосибирск, Научная книга, 1997.
13. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, *УФН* **90**, 209 (1966) [*Sov. Phys. Usp.* **9**, 701 (1967)].