

# Квантовые эффекты в одномерной магнитно-гравитационной ловушке ультрахолодных нейтронов

А. И. Франк<sup>1)</sup>, В. Г. Носов<sup>+</sup>

Лаборатория нейтронной физики им. И. М. Франка, Объединенный Институт ядерных исследований  
141980 Дубна, Московская обл., Россия

<sup>+</sup>Российский научный центр “Курчатовский Институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 февраля 2004 г.

Рассмотрена задача о хранении ультрахолодных нейтронов над плоским магнитным зеркалом в присутствии гравитации. Для нейтронов с определенной поляризацией суммарный магнитный и гравитационный потенциал может иметь минимум, образуя магнитно-гравитационную ловушку. При малых энергиях вертикального движения состояние нейтрона в такой яме оказывается квантованным. Анализируется возможность осуществления соответствующего квантового гравитационного эксперимента.

PACS: 03.75.Be

Ультрахолодные нейтроны и квантовый гравитационный эксперимент. Вскоре после открытия ультрахолодных нейтронов (УХН) появилась возможность оперировать с нейтронами столь низких энергий, что квантовые эффекты оказываются значимыми уже при взаимодействии УХН с макроскопическими объектами. Иллюстрацией сказанного является, в частности, работа [1], где рассматривалась задача о хранении УХН на горизонтальном зеркале в присутствии силы тяжести. Очевидно, что классическое рассмотрение этой задачи корректно лишь при выполнении условия  $E_z \gg \hbar\omega_r$ , где  $E_z$  – энергия вертикального движения,  $\omega_r$  – циклическая частота отражений нейтрона от зеркала. При малых энергиях это условие не выполняется и необходим квантовый подход.

Структура потенциала соответствующей квантовой задачи имеет вид треугольной ямы, ограниченной при  $z < 0$  эффективным потенциалом зеркала  $U_{ef} > E$ , а при  $z > 0$  – гравитационным потенциалом  $V_g = mgz$ . Энергия вертикального движения оказывается квантованной, а пространственное распределение нейтронов определяется волновыми функциями, имеющими вид функций Эйри. Решение характеризуется энергетической и линейной константами  $\epsilon_g \approx 0.6 \cdot 10^{-12}$  эВ, и  $\ell_g \approx 5.9 \cdot 10^{-4}$  см. Недавно квантование энергии при хранении УХН на плоскости наблюдалось в эксперименте [2].

Поскольку основные параметры задачи определяются ускорением свободного падения, то можно надеяться, что измерение этого эффекта может быть

весьма полезным для изучения гравитационного взаимодействия нейтрона. В частности, авторы работы [3] привели верхнюю оценку силы гипотетического гравитационно-подобного взаимодействия между нейтроном и зеркалом, полученную из сопоставления результатов эксперимента [2] с теорией.

В настоящем письме обсуждается еще одна возможность наблюдения квантовых состояний нейтрона в гравитационном поле Земли.

*Магнитно-гравитационная ловушка для УХН.* Предложение состоит в том, чтобы вместо материального зеркала использовать магнитное зеркало Владимирского [4]. Будем исходить из того, что магнитная система зеркала расположена в плоскости  $Z = 0$  и представляет собой набор ленточных знакопеременных токов с пространственным периодом  $d$ , текущих вдоль оси  $Y$ . Известно, что уже на сравнительно малых расстояниях от проводников магнитное поле будет иметь вид [4]

$$\begin{aligned} B_z &= B_m e^{-\gamma z} \cos(\gamma x), \\ B_x &= B_m e^{-\gamma z} \sin(\gamma x), \end{aligned} \quad e^{-2\gamma z} \ll 1, \quad z > 0, \quad (1)$$

где  $\gamma = 2\pi/d$ . Во всей области  $z > 0$  такое поле могло бы быть создано током, текущим в плоскости  $z = 0$  и имеющим распределение плотности  $j = (c/2\pi)B_m \sin(\gamma x)$ .

Если движение нейтрона в магнитном поле адиабатически медленно [4], то вектор спина остается параллельным или антипараллельным направлению поля. В результате потенциал магнитного взаимодействия нейтрона есть

$$u_m = \pm\mu|B|, \quad |B(z)| = B_m e^{-\gamma z}, \quad (2)$$

<sup>1)</sup>e-mail: frank@nf.jinr.ru

где  $\mu$  – магнитный момент нейтрона. С учетом силы тяжести полный потенциал есть

$$U(z) = \pm \mu B_m e^{-\gamma z} + mgz. \quad (3)$$

Для одной из спиновых компонент этот потенциал имеет минимум, образуя потенциальную яму (см. рис.1). В точке минимума

$$u_m = +\mu|B|, \quad \gamma \mu B_m e^{-\gamma z} = mg \quad (z > 0), \quad (4)$$

и полная сила равна нулю. Равенство (4) представляет собой условие “магнитного подвеса” в точке  $z = L > 0$ . Перепишем его в виде

$$\gamma = mg/\mu B_0, \quad (5)$$

где  $B_0 = B_m e^{-\gamma L}$  – величина поля в плоскости равновесия  $z = L$ .

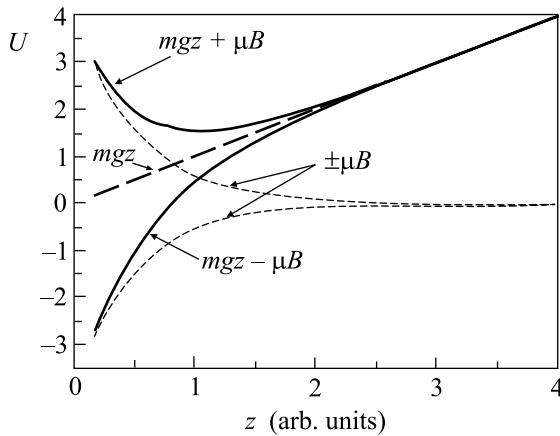


Рис.1. Структура потенциала над магнитным зеркалом для двух спиновых компонент

Наличие потенциальной ямы означает, что нейтрон с достаточно малой вертикальной скоростью может быть захвачен в нее, совершая колебания вокруг плоскости равновесия. При малых значениях переменной

$$\eta = z - L \quad (6)$$

получим с точностью до квадратичных членов включительно

$$U \approx mgL + \mu B_0 + \frac{1}{2} \mu B_0 \gamma^2 \eta^2. \quad (7)$$

Переменная часть потенциала

$$u(\eta) = \frac{1}{2} \mu B_0 \gamma^2 \eta^2 = C \eta^2 \quad (8)$$

определяет жесткость  $C$  соответствующего осциллятора:

$$C = \frac{m^2 g^2}{\mu B_0}. \quad (9)$$

Частота колебаний около точки равновесия составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{mg^2}{\mu B_0}}, \quad (10)$$

а их амплитуда  $\eta_0$  определяется энергией вертикального движения  $E_z$ :

$$E_z = \frac{1}{2} C \eta_0^2, \quad \eta_0 \frac{1}{mg} \sqrt{2\mu B_0 E_z}. \quad (11)$$

Условие справедливости принятого здесь гармонического приближения есть

$$\eta_0 \ll \gamma^{-1} \quad \text{или} \quad E_z \ll \mu B_0. \quad (12)$$

Критерий применимости классического описания движения имеет вид

$$E_z \gg \hbar \omega = \varepsilon, \quad \varepsilon = \hbar \sqrt{\frac{mg^2}{\mu B_0}}. \quad (13)$$

При меньшей энергии нейтрона необходимо квантовое рассмотрение, и проблема сводится к хорошо известной задаче о линейном осцилляторе (см., например, [4]). Для спектра энергий и волновых функций имеем

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \varepsilon, \quad (14)$$

$$\psi_n(\eta) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} \eta^2} H_n \left(\eta \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right), \quad (15)$$

где  $H_n$  – полиномы Эрмита.

На рис.2 приведены рассчитанные по формуле (15) пространственные распределения нейтронов около плоскости равновесия для первых пяти уровней ( $n = 0 \div 4$ ). На рис.3 представлена сумма плотнос-

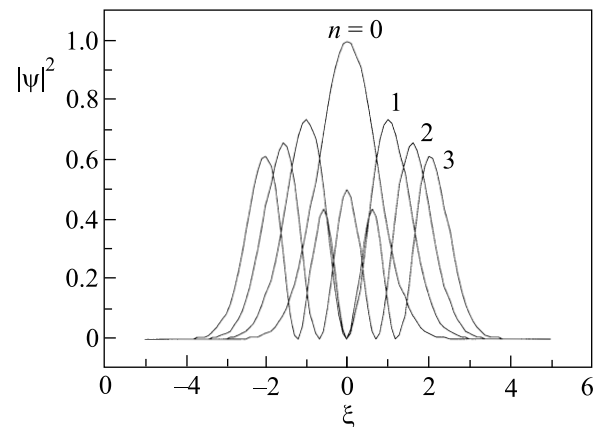


Рис.2. Квадрат модуля волновой функции в ловушке для нескольких первых состояний

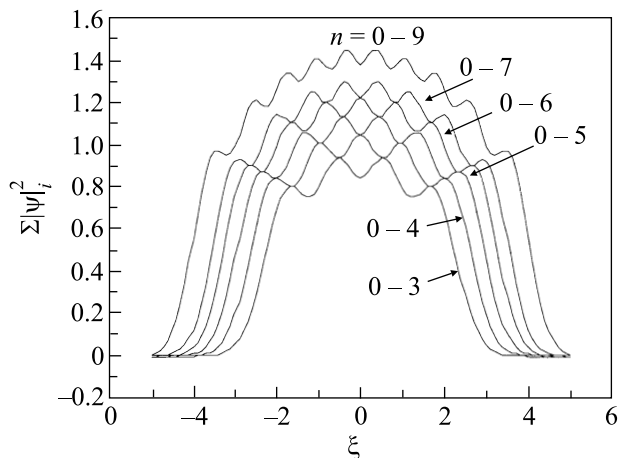


Рис.3. Распределение полной плотности нейтронов, находящихся на нескольких нижних уровнях

тей – интегральное распределение при суммировании от  $n = 0$  до  $n = N$  ( $N = 3 \div 7$ ). По горизонтальной оси отложена безразмерная координата  $\xi = \kappa\eta$ , где  $\kappa = \sqrt{m\omega/\hbar}$ .

**Численные оценки и возможности реализации.** Прежде всего отметим, что все основные параметры обсуждаемой задачи не являются фиксированными, а существенным образом зависят от величины и геометрии магнитного поля. В этом состоит основное отличие от случая хранения УХН на плоскости, где эффективный потенциал определен изначально. Выберем в качестве параметра задачи величину магнитного поля в области равновесия  $B_0$ . Экспоненциальный характер спада поля и равенство магнитной и гравитационной сил задают величину показателя экспоненты  $\gamma$  в соответствии с (5). Тем самым форма потенциала оказывается определенной.

Приведем некоторые оценки. Пусть магнитное поле  $B_0 = 0.5$  Гс. Этому соответствует величина  $\gamma^{-1} = 3 \cdot 10^{-3}$  см. Чтобы создать поле с такой величиной затухания, период токовой структуры должен составлять 0.2 мм. Частота  $\omega$  составит  $\omega = 576$  с $^{-1}$ , чему соответствует характерная энергия  $\varepsilon \approx 3.8 \cdot 10^{-13}$  эВ. Это на порядок меньше магнитной энергии  $\mu B_0 = 3 \cdot 10^{-12}$  эВ, так что условие гармоничности хорошо выполняется для низших уровней. Очевидно, что для того, чтобы ширина уровней была много меньше расстояния между ними, время пребывания нейтронов в системе  $t$  должно удовлетворять соотношению  $t \gg \hbar/\varepsilon$ . При продольной скорости нейтронов  $V \approx 5$  м/с, типичной для УХН, это соотношение хорошо выполняется при длине зеркала в несколько сантиметров. Спектр состояний дается формулой (14), а константа  $\kappa$ , опреде-

ляющая масштаб пространственного распределения, равна  $\kappa \approx 9.6 \cdot 10^2$  см $^{-1}$ . Само распределение определяется формулой (15), а единица шкалы на графиках рис.2 и 3 соответствует величине  $\kappa^{-1} = 10$  мкм.

Остается еще свобода в выборе расстояния  $L$  от магнитного зеркала до точки равновесия. Как видно из рис.3, первые десять состояний локализуются в области  $\pm 50$  мкм от плоскости равновесия. Выбрав величину  $L$  равной 100 мкм ( $L\gamma \approx 3.3$ ), получим из (5), что магнитное поле на поверхности зеркала должно быть порядка 15 Гс. Приведенные параметры эксперимента представляются достаточно реалистичными.

Зная величину  $L\gamma$ , можно оценить степень точности формулы (1) для распределения поля. Если знак ленточных токов зеркала меняется на обратный через половину периода, то для приведенных выше параметров зеркала вклад высших гармоник в модуль магнитного поля в области равновесия составит величину порядка одного процента.

При движении нейтрона вдоль оси  $Y$  вблизи плоскости равновесия он находится в магнитном поле, постоянном как по величине, так и по направлению. При ином направлении скорости нейтрон пересекает области с различающимся направлением поля. Таким образом, в системе координат нейтрона имеется магнитное поле, вращающееся с частотой  $\Omega = 2\pi V_x/d$ , где  $V_x$  – составляющая скорости вдоль оси  $X$ . Условие адиабатической медленности движения [4] формулируется, следовательно, так:

$$\omega_L \gg \Omega, \quad \omega_L = \frac{2\mu B_0}{\hbar}, \quad \Omega = \frac{2\pi V \sin \theta}{d}, \quad (16)$$

где  $\omega_L$  – ларморовская частота, а  $\theta$  – угол между вектором скорости и осью  $Y$ .

При скорости  $V = 5$  м/с, типичной для УХН, и выбранном значении  $B_0$ , выполнение условия (15) требует достаточно хорошей коллимации пучка  $\theta \ll \ll 0.05$ . Отметим, что отношение  $\omega_L/\Omega$  пропорционально  $B_0^2$ , поскольку в соответствии с (5) период структуры  $d = 2\pi/\lambda$  пропорционален  $B_0$ .

Что касается возможности наблюдения квантовых свойств магнитно-гравитационной ловушки, то такая возможность фактически продемонстрирована в работе [2], где уже измерялось пространственное распределение нейтронов, хранящихся на материальном зеркале. Возможность наблюдения переходов между уровнями при наложении переменного магнитного поля также кажется привлекательной.

В заключение отметим, что эксперимент по наблюдению гравитационных уровней в магнитно-гравитационной ловушке уступает по светосиле

эксперименту [1, 2], что обусловлено как меньшей энергией состояния, так и требованиями к коллимации пучка. Однако этот недостаток вполне компенсируется существенно большей чувствительностью пространственного положения захваченного в ловушку нейтрона к величине ускорения свободного падения. Это обусловлено тем, что в магнитно-гравитационном случае характерная линейная постоянная  $\ell_{gm} = \gamma^{-1}$  обратно пропорциональна  $g$ , в то время как в случае обычного зеркала  $\ell_g \propto g^{-1/3}$  [1]. Кроме того, величина линейной константы  $\ell_{gm}$  значительно превосходит величину  $\ell_g$ . Ее численное значение  $\ell_{gm}[\text{мкм}] = 60 \times B_0 [\text{Гс}]$ .

Один из авторов (АИФ) весьма благодарен В. И. Фурману за стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 04-02-16929) и INTAS (грант # 00-00043).

1. В. И. Лушиков, А. И. Франк, Письма в ЖЭТФ **28**, 607 (1978).
2. V. V. Nesvizhevsky, H. Börner, A. K. Petukhov et al., Nature **145**, 297 (2002); V. V. Nesvizhevsky, H. Börner, A. M. Gagarski et al., Phys. Rev. **D67**, 102002 (2003).
3. H. Abele and A. Westphal, ILL Annual report 2002, p. 76, <http://www.ill.fr/AR-02/site/areport/fset73.htm>; H. Abele, S. Baessler, and A. Westphal, Lect. Notes Phys. **631**, 355 (2003).
4. В. В. Владимирский, ЖЭТФ **39**, 1062 (1960).