Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 1, стр. 45 – 48 *5 января 1983 г.*

СТОХАСТИЧНОСТЬ В ДВУХЧАСТИЧНОМ РАССЕЯНИИ

С.В.Манаков, Л.Н.Щур

На примере рассеяния вихревых пар в двумерной гидродинамике демонстрируются проявления стохастичности в классическом двухчастичном рассеянии.

1. Привычная на первый взгляд задача о двухчастичном рассеянии может подчас демонстрировать ряд весьма неожиданных свойств. Необычные эффекты возникают, конечно, если сталкивающиеся частицы обладают внутренней структурой. Так бывает, например, когда рассеиваемые объекты представляют собой связанные состояния своих элементарных составляющих; при этом особый интерес представляет случай, когда эти элементарные составляющие в "голом" виде существовать не могут.

По-видимому, простейший пример такого рода с минимальным числом степеней свободы дается системой точечных вихрей в двумерной гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости. "Свободной" частицей в этой системе следует считать вихревой диполь – совокупность двух вихрей с равными по модулю и противоположными по знаку циркуляциями. Этот выбор навязывается нам следующим обстоятельством.

Система N вихрей с циркуляциями κ_i $(i = 1, \ldots, N)$ представляет собой гамильтонову систему, фазовое пространство которой состоит из совокупности декартовых координат вихрей x_i, y_i $(i = 1, \ldots, N)$. Скобка Пуассона задается выражением

$$\{A, B\} = \Sigma \kappa_i^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial y_i} - \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right), \tag{1}$$

а гамильтониан, представляющий регуляризованную кинетическую энергию жидкости, есть

$$H = {}^1/_2 \sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j \ln\left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right], \tag{2}$$

так что уравнения движения представляются в виде

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \ \dot{y}_i = \{y_i, H\}. \tag{3}$$

Из трансляционной инвариантности H следует сохранение импульса $\mathbf{P}$

$$P_x = \Sigma \kappa_i y_i, \quad P_y = - \Sigma \kappa_i x_i,$$

так что $\{P_x, H\} = 0$, $\{P_y, H\} = 0$. Однако

$$\{P_x, P_y\} = \Sigma \kappa_i \tag{4}$$

и, выражаясь квантовомеханическим языком, система может иметь определенное значение импульса (а только такой объект можно назвать "частицей"), только если ее полная циркуляция равна нулю $\Sigma \kappa_i = 0$.

Простейшим объектом такого типа является именно вихревой диполь, имеющий постоянную скорость и движущийся по прямой. Подчеркнем, что изолированный вихрь, также как и любая совокупность вихрей с $\Sigma \kappa_i \neq 0$, не могут быть асимптотически свободными.

В дальнейшем мы будем различать вихревой диполь с нулевой суммарной интенсивностью (элементарная частица) и вихревую пару с произвольной суммарной интенсивностью, не являющуюся частицей.

2. Вихревой диполь размера a обладает импульсом $\mathbf{P} = \kappa\,[\mathbf{n} \times \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – вектор с направлением от вихря $-\kappa$ к вихрю $+\kappa$, $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к плоскости. Диполь имеет энергию $\epsilon = {}^{\kappa^2}/_2 \ln {}^{P^2}/_{\kappa^2}$ и движется со скоростью $\mathbf{v} = {}^{\partial\epsilon}/_{\partial \mathbf{P}} = {}^{\kappa^2 \mathbf{P}}/_{P^2}$, так что положение центра диполя есть

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{R}_0\,.$$

Рассмотрим столкновение двух диполей с циркуляциями κ_1, κ_2, $|\kappa_1 - \kappa_2| << \kappa_{1,2}$ и импульсами на бесконечности $\mathbf{P}_1^{in}$ и $\mathbf{P}_2^{in}$, полагая $a_1 \sim a_2 \sim a$. Если прицельный параметр столкновения $\delta = \min_t |\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t)|$ (где движение диполей считаем свободным) велик, $\delta >> a$, то рассеяние диполей качественно не отличается от обычного рассеяния двух частиц; при этом угол рассеяния ведет себя как $\varphi_{sc} \sim (a^2/\delta^2)$ (см. рис. 1, *а*). Однако при $\delta \sim a$ возникает качественно новое поведение. Диполи, налетая друг на друга, сближаются до расстояния порядка их первоначальных размеров. При этом может произойти расщепление диполей на две вихревые пары с наборами циркуляций $(\kappa_1, -\kappa_2)$ и $(-\kappa_1, \kappa_2)$. Размеры пар l_1, l_2 того же порядка, что и размеры диполей a_1, a_2. Пары не являются частицами – суммарные циркуляции в них $\Delta\kappa = |\kappa_1 - \kappa_2|$ отличны от нуля. Поэтому пары не могут уйти на бесконечность. Они вращаются по окружности радиусов $\rho \sim \kappa l/\Delta\kappa$ с угловыми частотами $\omega \sim \Delta\kappa/l^2$ в противоположных направлениях. Поскольку $\Delta\kappa << \kappa$, то $\rho >> l$ и бо́льшую часть времени пары взаимодействуют слабо. Однако, поскольку их траектории пересекаются, время от времени они сближаются до расстояний порядка их собственных размеров. В результате такого "сильного взаимодействия" вихри, составляющие пары, могут либо вернуться к своим первоначальным партнером (при этом образуются вихревые диполи, которые уходят на бесконечность, и процесс рассеяния, тем самым, заканчивается) либо же пары рассеиваются на угол порядка единицы и процесс продолжается до следующего "сильного столкновения" и т. д.

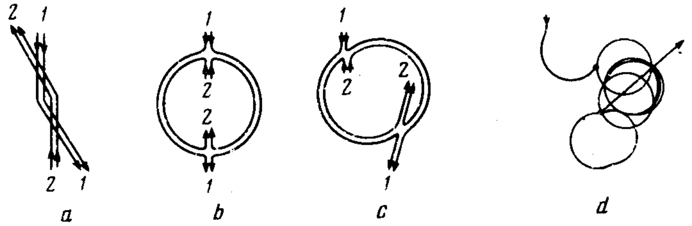

Рис. 1. Траектории вихрей при различных значениях прицельного параметра: a — $\delta = 2$; b — $\delta = 0$; c — $\delta = 0,5$; d — $\delta = 0,7897$, показана траектория одного вихря

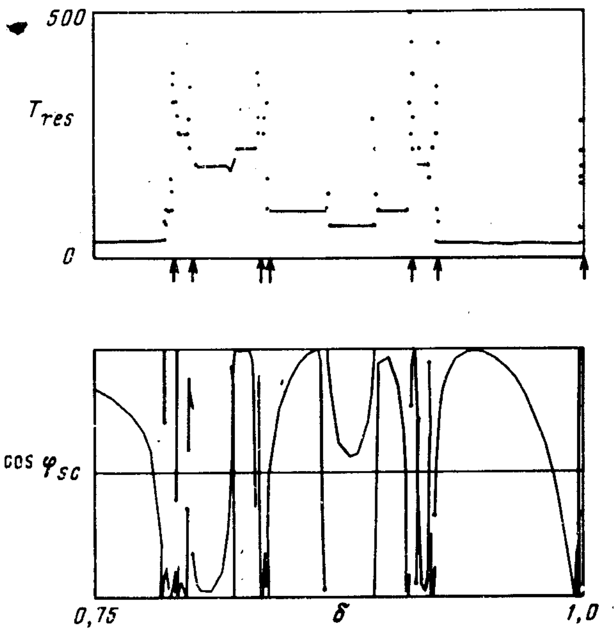

Рис. 2. Зависимости $T_{res}(\delta)$ и $\cos\varphi_{sc}(\delta)$ от прицельного параметра δ. Функция $\cos\varphi_{sc}$ выбрана для бо́льшей наглядности

Уже на основе этой качественной картины легко понять, что рассеяние вихревых диполей совершенно нетривиально. Во-первых, даже на классическом уровне это рассеяние имеет ярко выраженный резонансный характер и сопровождается рождением промежуточного долгоживущего (резонансного) состояния. Во-вторых, такие характеристики рассеяния, как угол рассеяния φ_{sc} (угол между $\mathbf{P}_1^{in}$ и $\mathbf{P}_1^{out}$) и время задержки в резонансном состоянии T_{res} являются весьма сингулярными функциями параметров столкновения (т. е. прицельного параметра и угла между $\mathbf{P}_1^{in}$ и $\mathbf{P}_2^{in}$).

3. Для иллюстрации сказанного приведем некоторые данные о рассеянии диполей, полученные путем численного интегрирования системы (3). Мы рассмотрим простейший вариант—

столкновение антипараллельных диполей с $a_1 = -a_2$ (при этом исходные скорости также антипараллельны), как функцию прицельного параметра δ. Положим $a_2 = a$, $|a| = 1$, $\kappa_1 = \kappa = 1$, $\kappa_2 = \kappa + \Delta\kappa$, $\Delta\kappa = 0,1$. (Для качественного наблюдения описанных эффектов важно лишь выбрать $\Delta\kappa << \kappa$).

На рис. 1,*b* приведены траектории вихрей при лобовом столкновении диполей с $\delta = 0$. При малых $\delta << a$ угол рассеяния $\varphi_{sc} \sim \delta/a$. При этом диполи, сблизившись, расщепляются на пары. Пары, описав полуокружность, превращаются обратно в диполи (см., например, рис. 1,*c*). Однако, при достижении δ порогового значения $\delta_c \simeq 0{,}785...$ первое столкновение пар не приводит к их превращению в диполи; пары продолжают движение по окружностям до следующего столкновения... и т. д. (см. рис. 1, *d*). При переходе δ через критическое значение функция $\varphi_{sc}(\delta)$ претерпевает разрыв, а $T_{res}(\delta)$ скачком изменяется. Зависимости $T_{res}(\delta)$ и $\cos\varphi_{sc}(\delta)$ представлены на рис. 2, где хорошо видны скачки функции T_{res} и особенности $\cos\varphi_{sc}$. Заметим, что при некоторых δ_* (отмечены стрелочками) $T_{res} \to \infty$. Это означает, что два диполя могут взаимно захватываться и находиться неограниченное время на расстояниях, не превышающих диаметра резонансных окружностей. Состояние захвата неустойчиво. При малом изменении параметров оно разрушается, т. е. пары превращаются в диполи, а последние уходят на бесконечность.

4. Динамика системы четырех вихрей изучалась различными авторами [1-4]. Так, в [2] доказано отсутствие дополнительного аналитического интеграла движения, означающее неинтегрируемость этой системы. Однако, во всех работах [1-4] рассматривалась система вихрей одного знака. При этом доступная область в фазовом пространстве компактна, и из-за наличия разделяющих инвариантных торов проявления стохастичности оказываются подавленными.

Наша постановка задачи кажется нам предпочтительнее по двум причинам. Во-первых, как показано в п.1, только система с нулевой суммарной интенсивностью имеет физический смысл. Во-вторых, такая постановка не только помогает вскрыть механизм проявления стохастичности, но и позволяет обнаружить совершенно необычную картину рассеяния двух составных частиц. В исследуемой модели мы полагали, что радиусы ко́ров вихрей много меньше размеров диполей. При этом изменением циркуляций вихрей в процессах столкновения можно пренебречь (напомним, что суммарная циркуляция системы сохраняется). Учет конечности радиусов ко́ров вихрей не изменит качественных явлений (особенности в функции угла рассеяния, резонансные состояния). Что же касается состояния захвата, то перераспределение циркуляций между вихрями в процессах столкновения приведет к тому, что все циркуляции станут различными по модулю. В результате, при дальнейших столкновениях диполи образовываться не смогут и состояние захвата станет устойчивым. Авторы благодарны Э.И.Рашба за полезные обсуждения, а Я.Г.Синаю, кроме того, за постоянный интерес к работе.

Литература

1. *Inogamov N.A., Manakov S.V.* Landau Institute preprint, 1979.
2. *Зиглин С.Л.* ДАН СССР 1980, **250**, 1296.
3. *Aref H., Pomphrey N.* Phys. Lett., 1980, **78A**, 297.
4. *Khanin K.M.* Physica, 1982, **4D**, 261.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 декабря 1982 г.