Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.1, стр.71 - 74 ©1994 г. 10 января

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ БЛЮМ-ЭМЕРИ-ГРИФФИТС-МОДЕЛИ НА РЕШЕТКЕ БЕТЕ

Н.С.Ананикян, Н.Ш.Измаилян, Р.Р.Щербаков

Ереванский физический институт

375036 Ереван, Армения

Поступила в редакцию 29 апреля 1993 г.

После переработки 2 ноября 1993 г.

Исследована Блюм-Эмери-Гриффитс-модель на подпространстве констант обменных взаимодействий $K = -\ln\cosh J$. Получены точные выражения для свободной энергии, λ -линии фазовых переходов II рода, трикритической точки и критических индексов.

При исследовании модели Изинга со спином 1, предложенной Блюмом, Эмери и Гриффитсом (БЭГ) [1], на шестиугольной и Кагомé решетках, Хоригучи показал, что когда константы дипольного (J) и квадрупольного (K) обменных взаимодействий удовлетворяют условию:

$$K = -\ln\cos hJ, \tag{1}$$

модель сводится к модели Изинга со спином $1/2$, но вместо одной критической точки фазового перехода II рода существует целая λ-линия [2-4]. Этот же результат, при условии (1), получен на квадратной решетке [5].

В настоящей работе продолжено исследование ферромагнитной БЭГ-модели на решетке Бете, имеющей бесконечномерную хаусдорфову размерность [6-10]. Рассмотрены критические свойства модели при условии Хоригучи (1). Найдено аналитически точное выражение для свободной энергии. В модели обнаружена λ-линия фазовых переходов II рода, которая при координационных числах решетки $q \geq 6$ оканчивается трикритической точкой (см. рисунок).

Статистическая сумма БЭГ-модели имеет вид

$$Z = \sum_{\{S\}} \exp[\sum_{<ij>} (JS_iS_j + KS_i^2S_j^2) + \sum_i (hS_i - \Delta S_i^2)]. \tag{2}$$

где $S_i = 0, \pm 1$, первое суммирование под знаком экспоненты выполняется по всем линиям решетки, второе – по всем узлам, а внешнее – по всем конфигурациям системы.

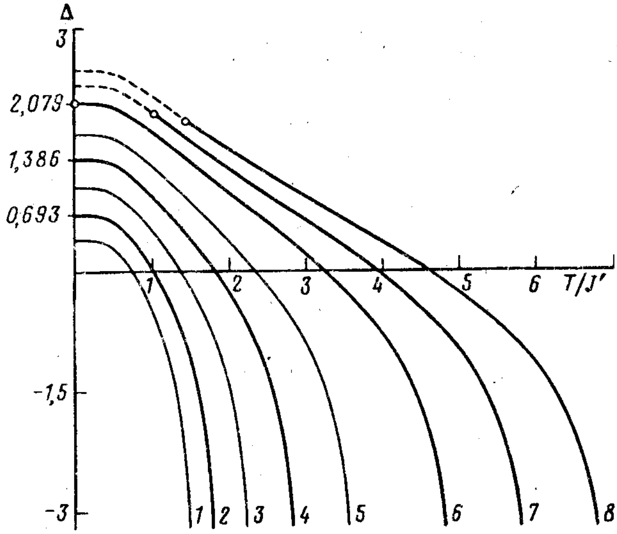
На решетке Бете статистическую сумму (2) можно записать в виде

$$Z_n = \sum_{S_0} \exp[hS_0 - \Delta S_0^2][g_n(S_0)]^q, \tag{3}$$

где q – координационное число решетки, S_0 – значение спина в центральном узле, $g_n(S_0)$ является статистической суммой на отдельной ветви решетки Бете, а n – число оболочек решетки [11].

Для $g_n(S_0)$ имеем рекуррентное соотношение:

$$g_n(S_0) = \sum_{S_1} \exp[JS_1S_0 + KS_1^2S_0^2 + hS_1 - \Delta S_1^2][g_{n-1}(S_1)]^{q-1}. \tag{4}$$



λ-линии фазовых переходов II рода для различных решеток. Линии 2, 4, 6, 7, 8 получены для решетки Бете с координационным числом q, равным соответственно 3; 4; 6; 7; 8 . Линии 1, 3, 5 соответствуют шестиугольной, квадратной и треугольной решеткам. На кривых 6, 7, 8 трикритические точки отмечены жирными точками

где S_1 – значение спина в узле, ближайшем к S_0.

Для описания модели можно ввести два параметра порядка: намагниченность $\left(m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} < S_i >\right)$ и квадрупольный момент $\left(p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} < S_i^2 >\right)$, сопряженные с внешними полями h и Δ, N – число узлов решетки.

В случае, когда решения рекуррентных соотношений (4) в термодинамическом пределе ($n \to \infty$) сходятся к стабильной точке [11], термодинамические свойства модели полностью определяются уравнениями

$$\exp(2h) = \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\gamma+1} \frac{v^2(1-p) + v - p\tanh J}{v^2(1-p) - v - p\tanh J}, \tag{5а}$$

$$\exp(2\Delta) = 4(1 - v^2)^{\gamma+1} \frac{(1-p)^2}{p^2 - m^2}, \tag{5б}$$

$$(1-p)v^3 - mv^2 - (1 + p\tanh J)v - m\tanh J = 0, \tag{5в}$$

где

$$v \equiv \frac{g(-1) - g(+1)}{2g(0)}, \qquad \gamma = q - 1.$$

Выражение для свободной энергии модели, приходящейся на один узел, имеет вид

$$\frac{f}{k_B T} = \frac{\gamma - 1}{2}\ln(1 + v^2 \mathrm{cotan}hJ) -$$
$$- \ln\left|\frac{1 - \exp(2h)[(1+v)/(1-v)]^\gamma}{1 - v\mathrm{cotanh}J - (1 + v\mathrm{cotanh}J)\exp(2h)[(1+v)/(1-v)]^\gamma}\right|. \tag{6}$$

При нулевом поле h, что соответствует экстремумам свободной энергии Гиббса, уравнения (5) имеют два решения:

$$v = 0, \qquad \exp(\Delta) = 2\frac{1-p}{p}, \qquad m = 0 \tag{7а}$$

и

$$1-\gamma\tanh J\cdot p+\frac{\gamma}{6}[3(\gamma+1)-6p-(\gamma-1)(\gamma-2)\tanh J\cdot p]v^2+O(v^4)=0, \qquad (7б)$$

В точке фазового перехода II рода экстремумы свободной энергии Гиббса совпадают. Следовательно, из пересечения решений (7а) и (7б) находим:

$$\Delta_\lambda=\ln[2(\gamma\tanh J-1)], \qquad (8а)$$

$$p_\lambda=\frac{1}{\gamma\tanh J}, \qquad (8б)$$

Этими выражениями определяется λ-линия фазовых переходов II рода. Условие

$$\left.\frac{\delta\Delta}{\delta p}\right|_{\substack{m=0\\v=0}}=\left.\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|_{\substack{m=0\\v=0}}+\left.\frac{\partial\Delta}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial p}\right|_{\substack{m=0\\v=0}}+\left.\frac{\partial\Delta}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p}\right|_{\substack{m=0\\v=0}}=0$$

на второе решение (7б) обрезает λ-линию в трикритической точке, которая имеет значение

$$\tanh J_{Tr}=\frac{3}{\gamma-2}, \qquad (9а)$$

$$p_{Tr}=\frac{\gamma-2}{3\gamma}. \qquad (9б)$$

Из выражения (9а) видно, что в ферромагнитной БЭГ-модели трикритическая точка существует при $q\geq 6$.

Разложения для полей h и Δ вблизи λ-линии с учетом (8) имеют вид

$$h=m\left\{-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{p_\lambda^2}(p-p_\lambda)+\frac{\gamma}{3(\gamma+1)^3}\frac{1}{p_\lambda^3}[(\gamma+2)(\gamma+1)-3(\gamma p_\lambda+1)]m^2+\right.$$
$$\left.+O[(p-p_\lambda)^2,\quad m^2(p-p_\lambda),m^4]\right\}, \qquad (10а)$$

$$\Delta-\Delta_\lambda=-\frac{1}{p_\lambda(1-p_\lambda)}(p-p_\lambda)+\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{2p_\lambda^2}m^2+$$
$$+O[(p-p_\lambda)^2,\quad m^2(p-p_\lambda),\quad m^4]. \qquad (10б)$$

На λ-линии ($h=0,\ \Delta=\Delta_\lambda$) имеет место $(p-p_\lambda)\sim m^2$, следовательно, разложения (10) можно переписать в виде

$$h=h_1m^3+h_2m^5+O(m^7), \qquad (11а)$$

$$\Delta-\Delta_\lambda=\Delta_1m^2+\Delta_2m^4+O(m^6), \qquad (11б)$$

где

$$h_1=\frac{\gamma(\gamma-1)}{6(\gamma+1)^3}\frac{1}{p_\lambda^3}[3\gamma p_\lambda-\gamma+2],\quad \Delta_1=-\frac{(\gamma-1)}{6(\gamma+1)^2}\frac{[3\gamma p_\lambda-\gamma+2]}{p_\lambda^2(1-p_\lambda)}.$$

В трикритической точке $h_1=0$, $\Delta_1=0$, поэтому $m\sim|h|^{1/5}$ $(\delta_{Tr}=5)$, $m\sim|\Delta-\Delta_{Tr}|^{1/4}$ $(\beta_{Tr}=1/4)$, $m\sim|T-T_{Tr}|^{1/2}$ $(\beta=1/2)$, $p-p_{Tr}\sim|h|^{2/5}$, $p-p_{Tr}\sim|\Delta-\Delta_{Tr}|^{\beta_{2Tr}}$ $(\beta_{2Tr}=1/2)$, $p-p_{Tr}\sim|T-T_{Tr}|^{\beta_2}$ $(\beta_2=1)$.

Интересно отметить, что в ферромагнитной БЭГ-модели, при условии Хоригуи, существует трикритическая точка при $q \geq 6$, тогда как на двумерных решетках [2-5] трикритическая точка не была обнаружена.

Эта работа частично поддерживалась Американским Физическим Обществом по программе Сороса, а также Федеральным Министерством Исследований и Технологий по гранту №211-5291 ЕрФИ 1993.

---

1. M.Blume, V.Emery and R.Griffiths, Phys. Rev. **A4**, 1071 (1971).
2. T.Horiguchi, Phys. Lett. **A113**, 423 (1986).
3. F.Y.Wu, Phys. Lett. **A116**, 245 (1986).
4. X.N.Wu and F.Y.Wu, J. Stat. Phys. **50**, 41 (1988).
5. K.F.Tang, Phys. Lett. **A133**, 183 (1988).
6. K.G.Chakraborty and J.M.Tucker, Phys. Lett., **A111**, 205 (1985).
7. K.G.Chakraborty and J.M.Tucker, Physica **A137**, 112 (1986).
8. N.R.Avakian, N.S.Ananikian, and N.Sh.Izmailian Phys. Lett. **A150** 163 (1990).
9. N.S.Ananikian, N.R.Avakian, and N.Sh.Izmailian, Physica **A172**, 391 (1991).
10. Н.С.Ананикян, Н.Ш.Измаилян, Р.Р.Щербаков, ФТТ **34**, 3448 (1992).
11. Р.Бэкстер, Точно решаемые модели в статистической механике М.: Мир 1985.