Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.2, стр.137 - 140

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАДОКСЫ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

А.В.Белинский

Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, физический факультет

119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 ноября 1993 г.

После переработки 30 ноября 1993 г.

Доказаны неравенства Белла (НБ) для двух и N наблюдателей, а также сформулирован парадокс Гинбергера – Хорна – Цайлингера (ГХЦ) без использования предположения о локальности, исходя лишь из существования положительно определенной функции распределения вероятностей.

Предсказанное квантовой теорией и неоднократно проверенное экспериментально нарушение неравенств Белла (НБ) часто трактуется как проявление нелокальности квантовой теории. Дело в том, что оригинальные неравенства Белл [1] вывел на основании концепций *теории скрытых параметров [2], одним* из допущений которой является предположение о *локальности*, то есть отсутствии влияния двух удаленных измерительных приборов друг на друга. С другой стороны, в ряде работ [3-7] показано, что для двух наблюдателей НБ можно обосновать, допуская лишь существование положительно определенной функции распределения вероятностей. В данной работе предложен новый алгоритм доказательства нелокальных (то есть не использующих предположения о локальности) НБ, позволяющий строго доказать НБ для произвольного числа наблюдателей N, а также сформулировать *нелокальный парадокс ГХЦ* типа $+1 = -1$.

Рассмотрим случайный процесс, описываемый $2N$ дихотомными переменными, принимающими единичные значения:

$$A_1 = \pm 1, \quad A'_1 = \pm 1, \quad A_2 = \pm 1, \quad A'_2 = \pm 1, \ldots, \quad A_N = \pm 1, \quad A'_N = \pm 1. \tag{1}$$

Предположим, что существует положительно определенная нормированная функция распределения вероятностей

$$W(A_1, A'_1, A_2, A'_2, \ldots, A_N, A'_N) \geq 0, \tag{2}$$

$$\sum_{A_1} \sum_{A'_1} \cdots \sum_{A'_N} (A_1, A'_1, A_2, A'_2, \ldots, A_N, A'_N) = 1, \tag{3}$$

удовлетворяющая условиям соответствия типа

$$\sum_{A_1} W(A_1, A'_1, A_2, A'_2, \ldots, A_N, A'_N) = W(A'_1, A_2, A'_2, \ldots, A_N, A'_N), \tag{4}$$

аналогично для других переменных и распределений низших размерностей.

Докажем в начале НБ для двух наблюдателей ($N = 2$) вида

$$|\Pi| \equiv (1/2)| < A_1 A_2 > + < A'_1 A_2 > + < A_1 A'_2 > - A'_1 A'_2 > | \leq 1 \tag{5}$$

без допущения о локальности. В эксперименте по проверке (5) усреднение производится по последовательным реализациям.

Дискретная функция распределения вероятностей (2) при $N = 2$ состоит из 2^4 совместных вероятностей:

$$W_1(++++) \equiv W(A_{11} = +1, A'_{11} = +1, \;\; A_{12} = +1, \;\; A'_{12} = +1),$$

$$W_2(+++-) \equiv W(A_{21} = +1, \;\; A'_{21} = +1, A_{22} = +1, \;\; A'_{22} = -1),$$

и так далее до $W_{16}(----)$. Таким образом, мы пронумеровали совместные вероятности $W_M(A_{M1}, A'_{M1}, A_{M2}, A'_{M2})$, $M = 1, 2, ..., 16$. Условие нормировки (3) теперь выглядит как

$$\sum_M W_M = 1. \tag{6}$$

Представим среднее произведение двух переменных, например A_1 и A_2, в виде суммы

$$< A_1 A_2 >= \sum_M A_{M1} A_{M2} W_M, \tag{7}$$

и аналогично для других входящих в (5) средних. Следовательно,

$$\Pi \equiv (1/2)(< A_1 A_2 > + < A'_1 A_2 > + < A_1 A'_2 > - < A'_1 A'_2 >) = \sum_M S_{M2} W_M, \tag{8}$$

где наблюдаемая Белла для двух наблюдателей

$$S_{M2} \equiv (1/2)[(A_{M2} + A'_{M2}) A_{M1} + (A_{M2} - A_{M2'}) A'_{M1}] \tag{9}$$

может принимать лишь единичные значения $= \pm 1$ в силу (1). Следовательно, из (2), (6) и (8) следует (5), причем половина (восемь) слагаемых суммы (8) входят со знаком плюс, а половина с минусом (если бы все слагаемые были одного знака, то такая сумма являлась бы просто разложением единицы (6)).

Приведенное доказательство фактически представляет собой обобщение вывода локального НБ [8-10] на нелокальный случай с положительно определенной функцией распределения вероятностей. Дальнейшее естественное обобщение состоит в переходе от двух к произвольному числу наблюдателей N. Положительно определенная нормированная функция распределения вероятностей (2)–(4) при этом имеет 2^{2N} составляющих W_M, $M = 1, 2, ..., 2^{2N}$.

Введем наблюдаемую Белла вида

$$S_{MN} = (1/2)[(A_{MN} \pm A'_{MN}) S_{MN-1} \pm (A_{MN} \mp A'_{MN}) S'_{MN-1}] = \pm 1, \tag{10}$$

аналогичную использованной в [9,10] для вывода локальных НБ. Рекурентное соотношение (10) позволяет перейти от НБ для $N = 2$ к НБ для $N = 3$ и т.д. Штрих в последнем члене (10) означает переобозначение входящих в наблюдаемую Белла для $(N-1)$ наблюдателя "штрихованных" переменных на "нештрихованные" и наоборот, причем, согласно (9), $S_{M1} = A_{M1}$. Знаки в (10) произвольны, но если в первых круглых скобках – сумма, то во вторых должна быть разность и наоборот.

Согласно (2), (6), (10),

$$|\sum_M S_{MN} W_M| \leq 1. \tag{11}$$

Это и есть прообраз нелокального НБ для произвольного числа наблюдателей N. Его конкретный вид вычисляется из (10). При этом нужно произвести следующие формальные преобразования: убрать в (10) индексы M, выразить

S_{N-1} и S'_{N-1} через переменные (1), раскрыть все круглые скобки, каждое слагаемое заключить в знаки усреднения. Полученное выражение по абсолютной величине не должно превышать единицы. Например, один из вариантов сочетания знаков в (10) для $N = 3$ дает

$$(1/2)|(< A'_1 A_2 A_3 > + < A_1 A'_2 A_3 > + < A_1 A_2 A'_3 > - < A'_1 A'_2 A'_3 > | \leq 1, \qquad (12)$$

что совпадает с соответствующим НБ, выведенным с использованием предположения от локальности [8-10]. То же относится и к НБ для произвольного N: в силу совпадения (10) с соответствующим выражением, полученным исходя из концепций локальной теории скрытых параметров [9,10]локальные НБ допускают обобщение на нелокальные по описанному алгоритму.

Напомним [9-11], что привлекательность НБ для $N > 2$ обусловлена количественным ростом расхождений с предсказаниями квантовой теории: в $2^{(N-1)/2}$ раз. Например, левая часть (12) в рамках квантового рассмотрения при определенных условиях принимает значение 2. Кроме того, начиная с $N = 3$ можно наглядно сформулировать парадокс ГХЦ типа $+1 = -1$ [8-10,12]. Он предполагает полную корреляцию результатов измерений, например,

$$< A'_1 A_2 A_3 >=< A'_1 A_2 A_3 >=< A_1 A'_2 A_3 >= A_1 A'_2 A_3 =$$

$$< A_1 A_2 A'_3 >= A_1 A_2 A'_3 = - < A'_1 A'_2 A'_3 >= -A'_1 A'_2 A'_3 = 1, \qquad (13)$$

что квантовая теория допускает. Таким образом, произведение

$$(A'_1 A_2 A_3)(A_1 A'_2 A_3)(A_1 A_2 A'_3)(A'_1 A'_2 A'_3) = -1 \; . \qquad (14)$$

Покажем далее, что это невозможно при выполнении требований (2) – (4).

В условиях полной корреляции (13) компоненты W_M, $M = 1, 2, ...64$, дающие $A'_{M1} A_{M2} A_{M3} = -1$, должны быть равны нулю. То же относится к компонентам, дающим $A_{M1} A'_{M2} A_{M3} = A_{M1} A_{M2} A'_{M3} = -1$. В результате из 64-х остается только 8 ненулевых компонентов W_M, но все все они дают $A'_{M1} A'_{M2} A'_{M3} = +1$! Более того, нет ни одного компонента W_M, который в любых трех из четырех сомножителей в круглых скобках левой части (14) давал бы одинаковые знаки, а в четвертом – противоположный в силу того, что произведение

$$(A'_{M1} A_{M2} A_{M3})(A_{M1} A'_{M2} A_{M3})(A_{M1} A_{M2} A'_{M3})(A'_{M1} A'_{M2} A'_{M3}) =$$

$$(A_{M1} A'_{M1} A_{M2} A'_{M2} A_{M3} A'_{M3})^2 = +1. \qquad (15)$$

Следовательно, ограничения (2) – (4), если и допускают требуемую в данных условиях полную корреляцию, то лишь в случае, когда произведение (14) равно +1. Сформулированный "нелокальный" парадокс ГХЦ не требует гипотезы о локальности, отказ от которой, таким образом, его – этот парадокс – не разрешает. Приведенные рассуждения легко обобщаются и на произвольные $N \geq 3$.

Отметим, что предложенный алгоритм доказательства НБ допускает также обобщение рассмотренных НБ на случай недихотомных переменных, заключенных в интервале [-1,+1]. Количество компонентов M при этом возрастает, но справедливость (11) в силу $|S_{MN}| \leq 1$ сохраняется. Таким образом, при соблюдении условий (2)–(4) НБ должны выполняться.

Почему же сформулированные соотношения не соответствуют квантовомеханическим результатам принципиально осуществимых экспериментов, способных продемонстрировать нарушения НБ или парадокс ГХЦ? *Единственный* аргумент, объясняющий эти противоречия, состоит в том, что в таких случаях не существует положительно определенной функции распределения вероятностей. Действительно, если в рамках квантовой теории рассчитать совместные вероятности W_M, равные соответствующим моментам дискретных переменных (1), то для конкретной модели оптического интерференционного эксперимента [13,14], в котором продемонстрированы нарушения НБ, получим (см. также [7])

$$W(A_1, A_1', A_2, A_2') = (1/16)[1 + A_1A_1'\cos(\alpha - \alpha') + A_2A_2'\cos(\beta - \beta') + \\ + A_1A_1'A_2A_2'\cos(\alpha + \beta - \alpha' - \beta') + A_1A_2\cos(\alpha + \beta) + A_1'A_2\cos(\alpha' + \beta) + \\ + A_1A_2'\cos(\alpha + \beta') + A_1'A_2'\cos(\alpha' + \beta')]. \quad (16)$$

Здесь α и β – фазовые задержки в каналах двух ($N = 2$) наблюдателей в режиме регистрации ими переменных A_1 и A_2, а α' и β' соответствуют режимам регистрации "штрихованных" переменных. Пусть $\alpha = 0$, $\alpha' = \pi/2$, $\beta = -\pi/4$, $\beta' = \pi/4$; тогда, согласно (16), некоторые совместные вероятности отрицательны:

$$W(++--) = W(+-+-) = W(-+-+) = W(--++) = -2^{1/2}/16, \quad (17)$$

а левая часть (5) оказывается равной $2^{1/2}$.

Итак, *единственной* причиной невыполнения (5) в рамках гипотезы существования функции распределения вероятностей $W(A_1, A_1', A_2, A_2')$ является несоблюдение (2), поскольку, согласно (16), условия нормировки (3) и соответствия (4) выполняются.

Функция распределения вероятностей $W(A, A', B, B')$ аналогична функции распределения Вигнера: часть входящих в нее наблюдаемых ("штрихованных" и "нештрихованных") описывается некоммутирующими операторами. Поэтому она и может принимать отрицательные значения.

Таким образом, можно заключить, что отказ от гипотезы о локальности не разрешает рассмотренных парадоксов.

Я благодарен Ю.А.Ильинскому, Г.Х.Китаевой, Д.Н.Клышко, С.П.Кулику, А.Н.Пенину и М.В.Чеховой за полезные обсуждения изложенных результатов, а также Международному научному фонду Сороса и Российскому фонду фундаментальных исследований, код проекта 93-02-14848, за финансовую поддержку.

---

1. J.S.Bell, Physics **1**, 195 (1964).
2. A.Einstein, B.Podolsky, and N.Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935); УФН, **16**, 440 (1936).
3. A.Fine, Phys. Rev. Lett. **48**, 291 (1982).
4. W.M.De Muynck, Phys, Lett. **A114**, 65 (1986).
5. W.M.De Muynck, Foundations of Phys. **16**, 973 (1986).
6. L.E.Szabo, Foundations of Phys. Lett. **6** 191 (1993).
7. А.В.Белинский, УФН **164**, №2 (1994).
8. D.N.Klyshko, Phys. Lett. **A172**, 399 (1993).
9. А.В.Белинский, Д.Н.Клышко, УФН **163**, №8, с.1 (1993).
10. A.V.Belinsky and D.N.Klyshko, Phys. Lett. **A176**, 415 (1993).
11. N.D.Mermin, Phys. Rev. Lett. **65**, 1838 (1990).
12. D.M.Greenberger, M.A.Horn, A.Shimony, and A.Zeilinger, Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990).
13. D.N.Klysko, Phys. Lett. **A132**, 299 (1988).
14. J.G.Rarity and P.B.Tapster, Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1990).