

КАК ИЗМЕРИТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНУЮ ВЕРОЯТНОСТЬ?

А.В.Белинский

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Физический факультет

119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 января 1994 г.

Предложен алгоритм восстановления значений совместных вероятностей наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами, по результатам интерференционного эксперимента, производимого в режиме счета фотонов.

Вопросы, связанные с возможностями получения отрицательных [1-9] и даже комплекснозначных [2,10] значений вероятностей, уже давно привлекают внимание исследователей. Дело в том, что функция распределения случайных величин, описываемых некоммутирующими операторами, не всегда положительно определена. Ярким примером является функция распределения Вигнера для координаты и импульса квантовой частицы. В ортодоксальном копенгагенском понимании квантовой механики таких функций распределения вероятностей не существует в силу невозможности проведения эксперимента по непосредственному их измерению. Тем не менее, косвенные методы измерений возможны. Это продемонстрировали авторы работы [11], восстановившие непрерывную двумерную функцию распределения Вигнера квадратурных компонент света в сжатом состоянии. Хотя отрицательных распределений при этом не наблюдалось, принципиальных ограничений такого рода квантовая теория не дает.

В данной работе предложена методика восстановления многомерной дискретной функции распределения вероятностей, принимающей отрицательные значения, применительно к эксперименту по наблюдению интерференции интенсивности [3,12,13], который демонстрирует парадокс Белла [14]. Схема представлена на рисунке. Измерения производятся в четырех режимах: вначале устанавливаются фазовые задержки α и β , затем α' и β , потом α и β' , и наконец, α' и β' .

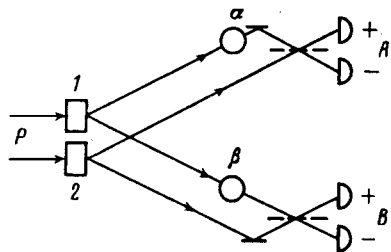


Схема интерферометра интенсивности с параметрическими источниками излучения для двух наблюдателей A и B. Коррелированные фотоны рождаются одновременно в нелинейных элементах 1 и 2 под действием общей когерентной накачки P и направляются к A и B по двум модам, одна из которых испытывает фазовую задержку (кружки). Моды смешиваются на 50%-ных светоделителях (штриховые отрезки) и детектируются идентичными детекторами "+" и "-"

Результаты эксперимента формально можно описывать дискретной четырехмерной функцией распределения вероятностей $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$, которая связывает дихотомные переменные, принимающие единичные значения:

$$A = \pm 1, \quad A' = \pm 1, \quad B = \pm 1, \quad B' = \pm 1. \quad (1)$$

Если наблюдатель A при фазовой задержке α зарегистрировал фотоотсчет на детекторе " + ", то этому событию приписывается значение $A = +1$. Если то же событие произошло при фазовой задержке α' , то $A' = +1$. Аналогично кодируются фотоотсчеты на детекторе " - ", а также в каналах наблюдателя B . "Штрихованным" переменным здесь соответствуют "штрихованные" фазовые задержки.

Квантовая теория предсказывает возможность получения знакопеременных $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$, а также трехмерных функций распределения вероятностей типа $P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'A'B}$, $P_{\alpha\alpha'\beta'}^{AA'A'B'}$ и т.д. [15]. Вычисление последних по результатам эксперимента - цель дальнейшего изложения. Подчеркнем, что непосредственно измерить можно лишь двумерные совместные вероятности $P_{\alpha\beta}^{AB}$, $P_{\alpha'\beta'}^{A'B'}$, $P_{\alpha\beta'}^{AB'}$, $P_{\alpha'\beta}^{A'B}$, а также одномерные P_{α}^A и P_{β}^B .

Сформулируем некоторые свойства $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$, которые позволяют решить поставленную обратную задачу.

В силу условности выбора знаков переменных, зависящего при идентичных детекторах от нашего произвола, должна наблюдаться симметрия:

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{\bar{A}\bar{A}'\bar{B}\bar{B}'}, \quad \bar{A} = -A, \quad \bar{A}' = -A', \quad \bar{B} = -B, \quad \bar{B}' = -B'. \quad (2)$$

Следствие:

$$P_{\alpha}^A = \sum_{A'} \sum_B \sum_{B'} P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = \sum_{A'} \sum_B \sum_{B'} P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{\bar{A}\bar{A}'\bar{B}\bar{B}'} = P_{\alpha}^{\bar{A}} = P_{\beta}^B = P_{\beta}^{\bar{B}} = 1/2, \quad (3)$$

что согласуется с результатами эксперимента [13]. Здесь использованы условия соответствия и нормировки вероятностей.

В силу симметрии "штрихованных" и "нештрихованных" переменных

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}. \quad (4)$$

В силу интерференционной природы эксперимента зависимость $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$ от одной из фазовых задержек должна быть гармонической типа

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = G(\alpha', \beta, \beta') + H(\alpha', \beta, \beta') \cos(\alpha + \varphi(\alpha', \beta, \beta')). \quad (5)$$

Это соотношение выполняется и для функций распределения вероятностей низших размерностей. Оно следует из классического стохастического описания смешения интерферирующих волн на светоделителях. Действительно, удвоенная интенсивность излучения на детекторе " + " наблюдателя A есть

$$\begin{aligned} 2n_{+}^a &= |a_1 e^{-i\alpha} + a_2|^2 = | |a_1| \exp(-i\alpha - i\varphi_1) + |a_2| \exp(-i\varphi_2) |^2 = \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1 a_2| \cos(\alpha + \varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где a_j - комплексные амплитуды смешиваемых сигналов, а φ_j - их фазы. Аналогично для детектора " - ":

$$2n_{-}^a = |a_1|^2 + |a_2|^2 - 2|a_1 a_2| \cos(\alpha + \varphi_1 - \varphi_2). \quad (7)$$

Эти выражения соответствуют (5), если принять, что совместные вероятности пропорциональны интенсивностям. Не противоречит (5) и квантовой теории.

По тем же причинам

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{\bar{A}A'BB'} = P_{(\alpha\pm\pi)\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} \quad (8)$$

что следует из выражений (6), (7) поскольку добавление $\pm\pi$ к α эквивалентно взаимозамене n_{\pm}^{α} и n_{\mp}^{α} . Аналогично и для других переменных и соответствующих им фазовых задержек.

Восстановим вначале двумерную совместную вероятность

$$P_{\alpha\alpha'}^{++} \equiv P_{\alpha\alpha'}^{A=+1, A'=+1} \quad (9)$$

Условие соответствия даст

$$P_{\alpha}^{+} = P_{\alpha\alpha'}^{++} + P_{\alpha\alpha'}^{+-} \quad (10)$$

Пусть $\alpha = \alpha'$, тогда $P_{\alpha\alpha}^{+-} = 0$, так как при этом $A \equiv A'$. Следовательно, с учетом (3),

$$P_{\alpha\alpha}^{++} = P_{\alpha}^{+} = 1/2. \quad (11)$$

В силу (5)

$$P_{\alpha\alpha'}^{++} = G(\alpha) + H(\alpha) \cos(\alpha' + \varphi(\alpha)). \quad (12)$$

Согласно (8)

$$P_{\alpha\alpha}^{+-} = P_{\alpha\alpha+\pi}^{++} = 0. \quad (13)$$

Из (11)-(13) следует

$$G(\alpha) + H(\alpha) \cos(\alpha + \varphi(\alpha)) = 1/2, \quad (14)$$

$$G(\alpha) - H(\alpha) \cos(\alpha + \varphi(\alpha)) = 0, \quad (15)$$

откуда

$$G(\alpha) = 1/4, \quad (16)$$

$$H(\alpha) = 1/4 \cos(\alpha + \varphi(\alpha)), \quad (17)$$

причем в последнем соотношении полагаем

$$\cos(\alpha + \varphi(\alpha)) \neq 0. \quad (18)$$

Подстановка (16), (17) в (12) дает

$$P_{\alpha\alpha'}^{++} = [1 + \cos(\alpha' + \varphi(\alpha)) / \cos(\alpha + \varphi(\alpha))] / 4 \equiv P_{\alpha\alpha'}^{++}. \quad (19)$$

Последнее тождество получается согласно свойству (4) и выводится аналогично (3). Из (19) следует

$$\varphi(\alpha) \equiv -\alpha \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

что не противоречит (18). Следовательно, с учетом (8), имеем

$$P_{\alpha\alpha'}^{AA'} = (1/4)[1 + AA' \cos(\alpha - \alpha')]. \quad (21)$$

Формальный квантовый расчет моментов $\langle n_{\pm}^{\alpha} n_{\pm}^{\alpha'} \rangle$, соответствующих совместным вероятностям $P_{\alpha\alpha'}^{\pm\pm}$, дает такой же результат.

Трехмерные функции распределения вероятностей связаны с двумерными распределениями простыми соотношениями типа

$$P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B} = \frac{1}{2}(P_{\alpha\beta}^{AB} + P_{\alpha'\beta}^{A'B} - P_{\alpha\alpha'}^{AA'}), \quad (22)$$

что легко проверить подстановкой в правую часть (22) $P_{\alpha\beta}^{AB} = P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B} + P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B}$ и т.д.

Совместные вероятности $P_{\alpha\beta}^{AB}$ и $P_{\alpha'\beta}^{A'B}$ определяются непосредственно из эксперимента и равны

$$P_{\alpha\beta}^{AB} = \frac{1}{4}[1 + AB \cos(\alpha + \beta)], \quad P_{\alpha'\beta}^{A'B} = \frac{1}{4}[1 + A'B \cos(\alpha' + \beta)]. \quad (23)$$

Подстановка (23) в (22) дает

$$P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B} = \frac{1}{8}[1 + AB \cos(\alpha + \beta) + A'B \cos(\alpha' + \beta) + AA' \cos(\alpha - \alpha')]. \quad (24)$$

Квантовый расчет соответствующих моментов дает такой же результат. Очевидно, что совместные вероятности, составляющие эту функцию распределения вероятностей, могут быть отрицательными. Например, $P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+} = \frac{1}{8}(1 - 2^{1/2})$ при $\alpha = \pi/2$, $\alpha' = 0$, $\beta = \pi/4$.

Итак, по данным эксперимента (23) и приняв свойства (2)–(5) и (8), можно восстановить дискретные функции распределения вероятностей типа $P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B}$. Они связывают наблюдаемые величины, некоторые из которых описываются некоммутирующими операторами (в данном случае, A и A'). Поэтому их прямые измерения, как и функции распределения Вигнера, невозможны. В этом смысле подобные распределения лишены операционального смысла. Однако, как показано в [11] для непрерывного распределения Вигнера и в данной работе для дискретных распределений, косвенные методы их измерения возможны. При этом положительная определенность $P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B}$ и функций подобного рода необязательна.

Что же означает отрицательная совместная вероятность? Дирак [1, 2] видел в ней "вполне определенный математически аналог отрицательной суммы денег". Добавим, что при описании результатов рассматриваемого эксперимента отрицательная вероятность *уменьшает* вероятность событий, ей соответствующих, и *увеличивает* вероятность противоположных событий. Например,

$$\langle AB \rangle = P_{\alpha\beta}^{++} + P_{\alpha\beta}^{--} - P_{\alpha\beta}^{+-} - P_{\alpha\beta}^{-+}, \quad (25)$$

$$P_{\alpha\beta}^{++} = P_{\alpha\alpha'\beta}^{+++} + P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+}. \quad (26)$$

Отрицательность $P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+}$ здесь означает, что вероятность результата $AB = +1$, компонентой которого является $P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+}$, падает, а вероятность противоположного результата ($AB = -1$) растет. Как и функция распределения Вигнера, многомерные распределения типа $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$ удобны в расчетах и дают возможность наглядного представления результатов. Еще одно их преимущество – возможность однозначного разрешения парадокса Белла [15].

Я благодарен Д.Н.Клышко за полезные обсуждения изложенных результатов и замечания по тексту статьи, а также Международному научному фонду Сороса и Российскому фонду фундаментальных исследований, код проекта 93-02-14848, за финансовую поддержку.

1. P.A.M.Dirac, Proc. R. Soc. London, Ser. A **180**, 1 (1941).
2. D.Home and F.Seller, Riv. Nuovo Cim. **14**, 1 (1991).
3. A.B.Белинский, Д.Н.Кльшко, УФН **163**, N8, 1 (1993).
4. J.D.Ivanovic, Lett. Nuovo Cim. **22**, 14 (1978).
5. I.V.Polubarinov, Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, E2-88-80.
6. W.Muckenheim, Lett. Nuovo Cim. **35**, 300 (1982).
7. D.Home, V.L.Lepore, and F.Selleri, Phys. Lett. A **158**, 357 (1991).
8. K.Wodkiewicz, Phys. Lett. A **129**, 1 (1988).
9. G.S.Agarwal, D.Home, and W.Schleich, Phys. Lett. A **170**, 359 (1992).
10. S.Youssef, Communication of the Supercomputer Computations Research Institute, Florida, FSU-SCRI-(93-77).
11. D.T.Smithey, M.Beck, M.G.Raymer, and A.Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
12. D.N.Klyshko, Phys. Lett. A **132**, 299 (1988).
13. J.G.Rarity and P.B.Tapster, Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1990); **70**, 1244 (1993).
14. J.S.Bell, Physics **1**, 195 (1964).
15. A.B.Белинский, УФН **164**, N2, 231 (1994).