Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.6, стр.389 - 392 ©1994 г. 25 марта

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ДЕТЕРМИНАНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

А.В.Байтин, А.А.Иванов

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 февраля 1994 г.

Предложен новый метод исследования параметрических неустойчивостей в однородной магнитоактивной плазме, который позволяет без предположения о наличии малых параметров свести задачу о нахождении всех собственных волн к нахождению корней полинома. Для двухволнового взаимодействия инкремент неустойчивости выражается в явном виде. Применение этого метода продемонстрировано на примере нахождения инкремента модуляционной неустойчивости нижнегибридной волны.

Известно, что в общем случае задача о нахождении инкрементов параметрической неустойчивости волны вида $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin(\Omega t)$ в однородной плазме в постоянном магнитном поле сводится к поиску значений ω, при которых следующий бесконечный детерминант равен нулю [1]:

$$D_N = \left| \frac{I_{mn}}{D^i_{mn}} \middle| \frac{D^e_{mn}}{I_{mn}} \right|, \tag{1}$$

где I – единичная матрица ($I_{mn} = \delta_{mn}$, $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ при } m = n \\ 0 \text{ при } m \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера), $D^e_{mn} = R_{em} J_{n-m}(\mu)$, $D^i_{mn} = R_{im} J_{m-n}(\mu)$, $\mu = |\mathbf{k}\,\mathbf{r}|$, $\mathbf{k}$ – волновой вектор неустойчивой волны, $\mathbf{r}$ – амплитуда осцилляций электронов в поле накачки,

$$R_{\alpha m} = \frac{\delta\epsilon_\alpha(\omega + m\Omega, \mathbf{k})}{(1 + \delta\epsilon_\alpha(\omega + m\Omega, \mathbf{k})},$$

$\delta\epsilon_\alpha(\omega + m\Omega, \mathbf{k})$ – вклад в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы частиц сорта α; J_n – функция Бесселя первого рода порядка n.

Аналитическое решение этой задачи может быть получено при малых значениях аргумента функций Бесселя μ, когда достаточно учитывать гармоники с номерами $m = 0, \pm 1$. В противном случае необходимо исследовать детерминант матрицы большой размерности, что аналитически сделать невозможно. Численное нахождение собственных значений такого детерминанта, элементы которого зависят от ω, представляет значительную сложность. Эффективный способ исследования бесконечных детерминантов, возникающих при исследовании дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, был предложен Хиллом [2]. В том случае, когда элементы матрицы не имеют других особенностей, кроме простых полюсов на комплексной плоскости ω, бесконечный детерминант, являющийся аналитической мероморфной периодической функцией ω, может быть представлен в виде суммы простой периодической функции, имеющей полюса в тех же точках и с такими же главными частями, что и детерминант, и целой функции. Если рассматривать потенциальные колебания в холодной магнитоактивной плазме, то детерминант системы (1) $D(\omega)$, отличаясь от рассмотренного Хиллом, имеет схожие черты: $D(\omega)$ – четная периодическая функция ω с периодом Ω и ее полюса, являющиеся корнями уравнения $1 + \delta\epsilon_\alpha(\omega + n\Omega, \mathbf{k}) = 0$, представляют собой восемь последовательностей $\omega^* = \pm\omega_{\alpha m} + n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где

$$\omega_{\alpha m}^2 = \frac{\omega_{p\alpha}^2 + \Omega_{H\alpha}^2}{2} + \frac{(-1)^m}{2}\left((\omega_{p\alpha}^2 + \Omega_{H\alpha}^2)^2 - 4\Omega_{H\alpha}^2\omega_{p\alpha}^2\cos^2\theta\right)^{1/2}, \tag{2}$$

θ – угол между направлениями волнового вектора $\mathbf{k}$ и магнитного поля, $\omega_{p\alpha}$ – ленгмюровская, $\Omega_{H\alpha}$ – циклотронная частоты частиц сорта α, а m пробегает значения 0; 1.

Представим $D(\omega)$ в следующем виде:

$$D(\omega) = N(\omega) + \sum_\alpha \sum_m \frac{K_{\alpha m}}{\sin^2(\pi\omega_{\alpha m}/\Omega) - \sin^2(\pi\omega/\Omega)}, \tag{3}$$

где

$$K_{\alpha m} = -\frac{\pi\sin(2\pi\omega_{\alpha m}/\Omega)}{\Omega}\lim_{\delta\to 0}\delta D(\omega_{\alpha m} + \delta) = \frac{\pi D_{\alpha m}\sin(2\pi\omega_{\alpha m}/\Omega)}{\Omega\partial\delta\epsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k})/\partial\omega|_{\omega=\omega_{\alpha m}}}, \tag{4}$$

$D_{\alpha m}$ – детерминант матрицы $D(\omega = \omega_{\alpha m})$, в которой регуляризирована строка, содержащая особенность при $\omega = \omega_{\alpha m}$: 1 в этой строке заменяется на 0, а $R_{\alpha m}$ заменяется на 1. При таком выборе $K_{\alpha m}$ двойная сумма в правой части (3) имеет совпадающие с $D(\omega)$ главные части во всех полюсах $D(\omega)$ и, следовательно, $N(\omega)$ не имеет полюсов на всей комплексной плоскости ω, то есть является целой периодической функцией ω. Также легко заметить, что $N(\omega)$ ограничена, так как $N(\omega = i\infty) = D(\omega = i\infty) = 1$ и, согласно теореме Лиувилля, тождественно равна константе ($N(\omega) \equiv 1$) [3]. Дисперсионное уравнение при этом принимает вид

$$D(\omega) = 1 + \sum_\alpha \sum_m \frac{K_{\alpha m}}{\sin^2(\pi\omega_{\alpha m}/\Omega) - \sin^2(\pi\omega/\Omega)} = 0, \tag{5}$$

где $K_{\alpha m}$ определяется выражениями (4). Это уравнение сводится к полиному относительно $\sin(\pi\omega/\Omega)$. Необходимо подчеркнуть, что уравнение (5) – точное, и погрешности вычисления собственных частот будут определяться погрешностями вычисления $K_{\alpha m}$, так как численное нахождение всех корней полинома любой степени не представляет сложности. Существенное упрощение может быть сделано, если рассматривать взаимодействие двух ветвей колебаний, когда нужно учитывать по одному корню уравнений $1 + \delta\epsilon_\alpha(\omega + n\Omega, \mathbf{k}) = 0$, например в случае нулевого или бесконечного магнитного поля. В этом случае дисперсионное уравнение является биквадратным относительно $\sin(\pi\omega/\Omega)$ и легко разрешается относительно ω:

$$\omega = \pm\frac{\Omega}{\pi}\arcsin\left(\left(\frac{A \pm (A^2 - 4B)^{1/2}}{2}\right)^{1/2}\right), \tag{6}$$

где

$$A = K_e + K_i + \sin^2(\pi\omega_e/\Omega_{LH}) + \sin^2(\pi\omega_i/\Omega_{LH}),$$
$$B = K_e\sin^2(\pi\omega_i/\Omega_{LH}) + K_i\sin^2(\pi\omega_e/\Omega_{LH}) + \sin^2(\pi\omega_e/\Omega_{LH})\sin^2(\pi\omega_i/\Omega_{LH}).$$

При наличии малых параметров аналитическое решение получается с любой степенью точности разложением по этому параметру A и B.

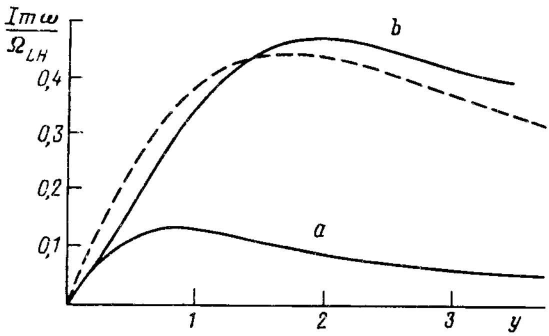
Рассмотрим применение данного метода к решению задачи о модуляционной неустойчивости волны на нижнегибридной частоте $\Omega = \omega_{pi}/(1+\omega_{pe}^2/\Omega_{He}^2)^{1/2}$ [4–8]. Его применение к этой задаче интересно потому, что в такой системе для больших амплитуд волны накачки максимум инкремента неустойчивости приближается к частоте накачки и достигается при $\mu \geq 1$ [7]. В этом случае в системе нет малых параметров и для корректного решения задачи необходимо учитывать большое число гармоник.

Рассмотрим неустойчивость волны, волновой вектор k которой почти перпендикулярен направлению магнитного поля $z : (k_z/k \ll \omega_{pi}/\omega_{pe})$. При выполнении условий

$$\Omega_{Hi} \ll \omega \ll \Omega_{He}, \qquad \omega_{pe} \ll \Omega_{He}, \qquad \omega/k_z v_{Te} \gg 1, \qquad kr_{d_{e,i}} \ll 1,$$

$r_{d_{e,i}}$ – электронный и ионный дебаевские радиусы, добавки в диэлектрическую проницаемость плазмы для волн с $k_z/k \approx \omega_{pe}/\omega_{pi}$ имеют вид: $\delta\epsilon_e = -\omega_{pi}^2 y^2/\omega^2$, $\delta\epsilon_i = -\omega_{pi}^2/\omega^2$, где $y = k_z\omega_{pe}/k\omega_{pi}$. Полюса детерминанта $D(\omega) : \omega_{en} = \pm\Omega_{LH}y + n\omega_{pi}$, $\omega_{in} = \pm n\omega_{pi}$. Особенность такой системы заключается в том, что частота волны накачки $\Omega = \omega_{pi}$ совпадает с корнем уравнения $1 + \delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = 0$ и при $\omega = \omega_{in}$ детерминант имеет полюса второго порядка. В этом случае решение (6) остается в силе, только

$$K_i = -\pi^2 \lim_{\delta \to 0} (\delta^2 D(\omega_{\alpha m} + \delta))/\Omega^2.$$



Зависимость инкремента неустойчивости от y. Кривая a – $\mu = 0,3$, b – $\mu = 2$, штриховая линия – результаты расчетов по формуле (7)

На рисунке изображены результаты расчета инкремента по формуле (6) в зависимости от y при различных значениях μ. Сплошной линией показана зависимость инкремента неустойчивости от y, штриховой линией – результат решения уравнения

$$\frac{1}{1+\delta\epsilon_e(\omega,\mathbf{k})} + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega,\mathbf{k})} + \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{1}{1+\delta\epsilon_e(\omega+\Omega,\mathbf{k})+\delta\epsilon_i(\omega+\Omega,\mathbf{k})} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1+\delta\epsilon_e(\omega-\Omega,\mathbf{k})+\delta\epsilon_i(\omega-\Omega,\mathbf{k})}\right) = 0, \qquad (7)$$

обычно используемого при анализе этой неустойчивости [4–8], область применимости которого ограничена значениями $\mu \ll 1$. При малом значении параметра $\mu = 0,3$ (см. рисунок, кривая a) результаты численного расчета практически совпадают с результатами расчета по уравнению (7). При $\mu = 2$ (см. рисунок, кривая b) уравнение (7) дает неверные результаты (они изображены на рисунке штриховой линией). Число гармоник, которое необходимо учитывать для достижения необходимой точности, увеличивается с ростом μ (при $\mu = 0,3$ $N = 6$, при $\mu = 2$ $N = 15$).

Предложенный метод позволяет легко находить инкременты параметрических неустойчивостей плазмы без использования малых параметров. Его также можно использовать для решения задач, в которых возникают бесконечные периодические детерминанты, например, при распространении волн и электронных пучков в периодических структурах, рассеянии электромагнитных волн релятивистскими электронными пучками и др.

---

1. В.П.Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, М.: Наука, 1973.
2. Э.Т.Уиттеккер, Д.Н.Ватсон, Курс современного анализа, ч.2. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. [E.T.Whittaker, G.N.Watson, A course of modern analysis, part 2, Cambridge Press, 1927.]
3. Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, М.: Наука, 1976, ч.1.
4. С.Л.Мушер, Б.И.Стурман, Письма в ЖЭТФ **22**, 537 (1975).
5. С.Л.Мушер, А.М.Рубенчик, Я.И.Шапиро, ЖЭТФ **90**, 74 (1987).
6. M.Porcolab, Phys. Fluids **17**, 1432 (1974).
7. А.В.Байтин, А.А.Иванов, Ю.В.Лазаренко, Физика плазмы **16**, 1195 (1990).
8. С.В.Владимиров, С.И.Попель, В.Н.Цытович, Физика плазмы **18**, 1146 (1992).