СЛУЧАЙНАЯ РЕЗИСТОРНАЯ СЕТЬ КАК (−1)-КОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

Н.В.Антонов

Санкт-Петербургский государственный университет
199034 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 19 января 1994 г.
После переработки 9 марта 1994 г.

Критическое поведение резисторной сети со случайно исключенными элементами описывается критическими показателями O_n-симметричной n-компонентной евклидовой теории поля φ^4 при $n = -1$.

На протяжении последних лет задача о критическом поведе́нии резисторных сетей со случайно исключенными элементами вызывала постоянный интерес [1–12]. На основании аналогии с задачами протекания была высказана гипотеза [3], подтвержденная затем результатами высокотемпературных разложений [4], что верхняя критическая размерность в этой задаче есть $d_c = 6$. Тогда критические показатели при $d > 6$ являются каноническими ($\eta = 0$, $\nu = 1/2$), а при $d < 6$ вычисляются с помощью метода ренормализационной группы в форме $(6-\epsilon)$-разложений по параметру $\epsilon = 6 - d$ – отклонению размерности пространства d от критического значения [5, 8, 10–12]. Однако задачу пока нельзя признать полностью решенной: так, в работах [7] были обнаружены некоторые недостатки предыдущих рассмотрений, а в [8] внесены существенные изменения в результаты $(6-\epsilon)$-разложений.

В настоящей работе мы покажем, что критическое поведение случайной резисторной сети описывается критическими показателями O_n-симметричной n-компонентной евклидовой теории поля φ^4 при $n = -1$. Это, в частности, означает, что верхняя критическая размерность задачи есть $d_c = 4$, и позволяет легко получить $(4-\epsilon)$-разложения критических показателей при $d < 4$.

Известно [2], что задачу о случайных резисторных сетях можно рассматривать как q-позиционную модель Поттса в пределе $q \to 0$ (задаче протекания отвечает другой формальный частный случай $q = 1$). Критическое поведение модели Поттса в непрерывном пределе описывается [13] евклидовой теорией $n \equiv (q-1)$-компонентного поля с функционалом действия

$$S(\varphi) = (\vec{\nabla}\varphi_i\vec{\nabla}\varphi_i)/2 + \tau\varphi_i\varphi_i/2 + ut_{ijk}\varphi_i\varphi_j\varphi_k/6 + \\ + wt_{ijkl}\varphi_i\varphi_j\varphi_k\varphi_l/24 + v(\varphi_i\varphi_i)^2/24. \qquad (1)$$

В (1) подразумевается интегрирование по d-мерному пространству x и суммирования по повторяющимся латинским индексам от 1 до n. Величина $\tau \propto T - T_c$ имеет смысл отклонения температуры (или ее аналога) от критического значения, u, v, w – параметры модели (константы связи). Входящие в (1) тензорные структуры определяются равенствами:

$$t_{ijk} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha, \quad t_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha, \qquad (2)$$

в которых $e^\alpha = \{e_i^\alpha\}$ – набор q единичных n-мерных векторов, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha e_j^\alpha = q\delta_{ij}/n, \qquad \sum_{i=1}^{n} e_i^\alpha e_i^\beta = (q\delta^{\alpha\beta} - 1)/n. \tag{3}$$

Действию (1) отвечает стандартная квантово-полевая диаграммная теория возмущений с пропагатором $\delta_{ik}(k^2+\tau)^{-1}$, тройной вершиной ut_{ijk} и двумя четверными вершинами wt_{ijkl} и vI_{ijkl}, где $I_{ijkl} = (1/3)(\delta_{ij}\delta_{kl}+$перестановки$)$. Далее будем называть их u-, w- и v-вершинами, соответственно. При $u = w = 0$ модель (1) совпадает с O_n-симметричной моделью Ландау–Гинзбурга (ЛГ). Поэтому если в какую-либо функцию Грина модели (1) дают вклад только v-вершины, она совпадает с соответствующей функцией Грина модели ЛГ.

Из соображений симметрии 1-неприводимые N-точечные функции Грина $\Gamma^{(N)}$ модели (1) имеют вид

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = D_{ij}^{-1} = \delta_{ij}F^{(2)}(u,w,v); \qquad \Gamma_{ijk}^{(3)} = t_{ijk}F^{(3)}(u,w,v); \tag{4}$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(4)} = I_{ijkl}F^{(4)}(u,w,v) + t_{ijkl}F^{(5)}(u,w,v).$$

Зависимость скалярных функций $F^{(N)}$ от u, w, v указана явно, зависимость от τ и переменных типа координат или импульсов подразумевается. Исходно модель (1) определена для натуральных n. Зависимость от n входит в диаграммы через симметрийные коэффициенты, которые после выделения тензорных множителей (типа явно указанных в (4)) всегда являются полиномами по n и допускают очевидное обобщение на любые n. В этом смысле можно говорить о модели ЛГ при $n = 0$ (задача о самонепересекающихся полимерных цепочках), модели (1) при $n = 0$ или $n = -1$ и т.п.

Критические показатели модели (1) и близкой к ней АТР-модели вычислялись в работах [14] в форме $(6-\epsilon)$- и $(4-\epsilon)$-разложений, последнее отвечает "трикритическому" поведению с $u = 0$ (в случае модели Изинга $q = 2$ кубический вклад в (1) исчезает тождественно). Хотя вычисленный в $(6-\epsilon)$-разложении критический показатель η имеет конечный предел при $q \to 0$, соответствующая неподвижная точка ренормгруппы при этом расходится: $u_* \propto q^{-2}$, то есть сам критический режим исчезает. Поэтому случай $q = 0$ необходимо рассматривать отдельно. При этом соотношения (3) принимают вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha e_j^\alpha = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} e_i^\alpha e_i^\beta = 1. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что почти все свертки тензоров (2) при $n = -1$ исчезают, например,

$$t_{iij} = 0, \qquad t_{iijk} = 0, \qquad t_{ijk}t_{ilm} = 0, \qquad t_{ijk}t_{ilms} = 0, \tag{6}$$

единственным исключением является шестизначковый объект $t_{ijkl}t_{imsp} = t_{jkl}t_{msp}$. При построении диаграмм векторные индексы тензоров (2) сворачиваются друг с другом и с δ-символами пропагаторов и v-вершин. При этом любая диаграмма $\Gamma^{(2)}$, содержащая хотя бы одну u- или w-вершину, исчезает, так как получить тензор δ_{ik} при свертке с участием хотя бы одного тензора (2) нельзя в силу (6). Следовательно, функция $F^{(2)}$ в (4) зависит только от v и совпадает (см. выше) с соответствующей функцией O_n-симметричной модели ЛГ при $n = -1$ (напомним, что $n = q - 1$ и для резисторной сети $q = 0$). Таким же образом с помощью (6) убеждаемся, что любая диаграмма $\Gamma^{(3)}$ отлична от нуля только при наличии в ней ровно одной u-вершины и отсутствии w-вершин, то есть $F^{(3)} = uf^{(3)}(v)$. Ненулевой вклад в $\Gamma^{(4)}$ дают лишь диаграммы без u- и w-вершин (вклад типа I_{ijkl}) и диаграммы с одной w-вершиной и без u-вершин (вклад типа t_{ijkl}), то есть $F^{(4)} = F^{(4)}(v)$, $F^{(5)} = wf^{(5)}(v)$. Ненулевые диаграммы с двумя w-вершинами появляются лишь в $\Gamma^{(6)}$ (см. замечание после формулы (6)).

Итак, мы показали, что пропагатор $D = < \varphi(\mathrm{x})\varphi(\mathrm{x}') >$ модели (1) при $q = 0$ совпадает с пропагатором O_n-симметричной модели ЛГ с взаимодействием $v(\varphi^2)^2$ для n-компонентного поля с $n = -1$. Первое слагаемое в $\Gamma^{(4)}$ содержит только диаграммы с v-вершинами и поэтому совпадает с соответствующей функцией Грина модели ЛГ с $n = -1$.

Критическое поведение модели ЛГ хорошо известно, см., например, [15]. Критическая асимптотика пропагатора при $v > 0$ имеет вид

$$D(r) = C_1 r^{-d+2-\eta} f(C_2 \tau r^{1/\nu}), \tag{7}$$

где $r = |\mathrm{x} - \mathrm{x}'|$ и C_i – зависящие от v нормировочные константы. При $d > d_c = 4$ критические показатели совпадают с каноническими ($\eta = 0$, $\nu = 1/2$), при $d < 4$ они нетривиальны и вычисляются в форме $(4 - \epsilon)$-разложений. Эти выводы сохраняются и для нашего частного случая $n = -1$, так как соответствующая неподвижная точка ренормгруппы остается при $n = -1$ конечной. В частности, полагая $n = -1$ в известных $(4 - \epsilon)$-разложениях критических показателей модели ЛГ, получаем:

$$\eta = \frac{\epsilon^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{215\epsilon^3}{8 \cdot 7^4} + \frac{\epsilon^4}{32 \cdot 7^6}\{29573 - 45696\zeta(3)\} + O(\epsilon^5), \tag{8}$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4 \cdot 7} + \frac{19\epsilon^2}{4 \cdot 7^3} + \frac{\epsilon^3}{32 \cdot 7^5}\{4061 - 11424\zeta(3)\} + O(\epsilon^4),$$

где $\epsilon = 4 - d$ и $\zeta(3) \simeq 1,20205$ – дзета-функция Римана. Для трехмерного пространства (то есть $\epsilon = 1$) из (8) находим $\eta = 0,0147$, $\nu = 0,5316$.

Пропагатор (7) в данной задаче имеет смысл сопротивления участка резисторной сети между точками x и x' [1, 4]. Экспериментальные результаты имеются лишь для критического показателя μ в соотношении (проводимость сети) $\propto \tau^{\mu}$; так, согласно [9] $\mu = 1,9 \pm 0,2$. Выражение μ через стандартные критические показатели η и ν оказывается само по себе нетривиальной задачей, не имеющей пока общепринятого решения [1, 4, 6, 7]. Так, предложенное в [6] соотношение

$$\mu = [\nu(3d - 4) - \beta]/2, \qquad \beta \equiv \nu(d - 2 + \eta)/2$$

опровергается результатами численных экспериментов, см. [7]. В любом случае это отдельная задача, которая должна решаться вне рамок какой-либо конкретной модели, используемой для расчета самих показателей η и ν в пропагаторе (7). Поэтому мы и привели численные значения для этих показателей, но не будем вычислять через них μ с помощью того или иного конкретного представления типа [6].

Основным качественным результатом настоящей работы тем самым следует считать обоснование значения $d_c = 4$ для критического поведения случайных резисторных сетей, по крайней мере при его описании теорией поля (1) с $q = 0$. Отличие полученного значения d_c от $d_c = 6$ для родственной задачи протекания не должно быть неожиданным: подобная ситуация известна также для задачи о самонепересекающихся полимерных цепочках ($d_c = 4$) и близкой к ней задачи об "истинных" случайных блужданиях без самопересечений ($d_c = 2$), см. [16]. В данном случае отличие связано с тем, что тройная вершина в модели (1) при $n = -1$ не дает вклада в интересующий нас парный коррелятор (7), тогда как в модели с $n = 0$ вклады всех вершин в любую функцию Грина нетривиальны.

---

1. S.Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973).
2. C.M.Fortuin and P.W.Kasteleyn, J. Phys. Soc. Jpn. Suppl. **26**, 11 (1969); Physica **57**, 536 (1972).
3. P.G.De Gennes, J. Phys. (Paris) Lett. **37**, L1 (1976).
4. J.P.Straley, Phys. Rev. **B15**, 5733 (1977); M.J.Stephen and G.S.Grest, Phys. Rev. Lett. **38**, 567 (1977); A.B.Harris and S.Kirkpatrick, Phys. Rev. **B16**, 542 (1977); R.Fish and A.B.Harris, Phys. Rev. Lett. **38**, 796 (1977); Phys. Rev. **B18**, 416 (1978).
5. D.J.Wallace and A.P.Young, Phys. Rev. **B17**, 2384 (1978); C.Dasgupta, A.B.Harris and T.C.Lubensky, Phys. Rev. **B17**, 1375 (1978); A.B.Harris, Phys. Rev. **B28**, 2614 (1983); A.B.Harris, S.Kim, and T.C.Lubensky, Phys. Rev. Lett. **53**, 743 (1984); Phys. Rev. Lett. **54**, 1088 (1985); T.C.Lubensky and A.-M.S.Tremblay, Phys. Rev. **B34**, 3408 (1986).
6. S.Alexander and R.Orbach, J. Phys. (Paris) Lett. **43**, L625 (1982).
7. J.G.Zabolitzky, Phys. Rev. **B30**, 4077 (1984); H.J.Hermann, B.Derrida, J.Vannimenus, Phys. Rev. **B30**, 4080 (1984); D.C.Hong, S.Havlin, H.J.Hermann, and H.E.Stanley, Phys. Rev. **30**, 4083 (1984); R.Rammal, J.C.Angles d' Auriac, and A.Benoit, Phys. Rev. **B30**, 4087 (1984); C.J.Lobb and D.J.Frank, Phys. Rev. **B30**, 4090 (1984).
8. T.C.Lubensky and A.-M.S.Tremblay, Phys. Rev. **B37**, 7894 (1988); J.Adler, A.Aharony, Y.Meir, and A.B.Harris, Phys. Rev. **B34**, 3469 (1986); J.Machta, R.A.Guyer, and S.M.Moore, Phys. Rev. **B33**, 4818 (1986).
9. B.Abeles, H.L.Pinch, and J.I.Gittleman, Phys. Rev. Lett. **35**, 247 (1973).
10. R.Blumenfeld, Y.Meir, A.Aharony, and A.B.Harris, Phys. Rev. **B35**, 3524 (1987); A.B.Harris, Phys. Rev. **B35**, 5056 (1987); Y.Park, A.B.Harris, and T.C.Lubensky, Phys. Rev. **B35**, 5048 (1987).
11. A.Aharony, R.Blumenfeld, P.Breton et al., Phys. Rev. **B40**, 7318 (1989); A.B.Harris and A.Aharony, Phys. Rev. **B40**, 7230 (1989); A.B.Harris, Y.Meir, and A.Aharony, Phys. Rev. **B41**, 4610 (1990).
12. Y.Meir, R.Blumenfeld, A.Aharony, and A.B.Harris, Phys. Rev. **B34**, 3424 (1986); J.Wang, A.B.Harris, and J.Adler, Phys. Rev. **B45**, 7084 (1992); A.Aharony, R.Blumenfeld, and A.B.Harris, Phys. Rev. **B47**, 5756 (1993); J.Adler, A.Aharony, R.Blumenfeld, and A.B.Harris, Phys. Rev. **B47**, 5770 (1993).
13. G.R.Golner, Phys. Rev. **B8**, 3419 (1973).
14. R.K.P.Zia and D.J.Wallace, J. Phys. **A8**; 1495 (1975); R.G.Priest and T.C.Lubensky, Phys. Rev. **B13**, 4159 (1976); Phys. Rev. **B14**, 5125 (1976); D.J.Amit, J. Phys. **A9**, 1441 (1976).
15. S.Ma. Modern Theory of Critical Phenomena. New York, 1976.
16. D.J.Amit, G.Parisi, and L.Peliti, Phys. Rev. **B27**, 1635 (1983).