Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.8, стр.501 - 506 ©1994 г. 25 апреля

О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ПЛАЗМОИДОВ

В.А.Кутвицкий, Л.С.Соловьев

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН
142092 Троицк Московской обл., Россия

Поступила в редакцию 25 февраля 1994 г.

В работе исследуется равновесие и устойчивость ограниченных плазменных образований, наблюдающихся в атмосфере Солнца. Ограничиваясь рассмотрением аксиально-симметричных конфигураций в пренебрежении гравитационным полем для некоторого частного класса распределений токов, удается получить точные решения для равновесий и локальных критериев их устойчивости. При этом предполагается наличие внешнего однородного магнитного поля и внешней плазмы постоянного давления.

1. Равновесие аксиально-симметричных плазменных конфигураций.

В пренебрежении гравитационным полем давление p постоянно на магнитных поверхностях $\psi = rA_\varphi$ =const, плотность ρ – произвольная функция координат, а равновесное магнитное поле описывается уравнением Грэда–Шафранова [1], которое в сферической системе координат r, θ, φ имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + II'(\psi) + r^2\sin^2\theta p'(\psi) = 0, \tag{1}$$

где $p(\psi)$ – давление, $I(\psi) = r\sin\theta B_\varphi$ – функция тока, азимутальная составляющая плотности тока $j_\varphi = II'/r\sin\theta + r\sin\theta p'$.

Для класса конфигураций с $p(\psi) = p_0 + p'\psi$, $I(\psi) = \alpha\psi$ уравнение (1) становится линейным уравнением с известной правой частью и его решения выражаются элементарными функциями [2, 3]

$$\psi = \left[-\frac{p'r^2}{\alpha^2} + \sum a_n f_n(\alpha r)P_n'(\cos\theta)\right]\sin^2\theta, \tag{2}$$

где $f_n(z) = z^{1/2}J_{n+1/2}(z)$, $J_{n+1/2}(z)$ – бесселевы функции, $P_n'(x)$ – производные полиномов Лежандра. В случае чисто азимутального тока $j = j_\varphi$, $B_\varphi = 0$

$$\psi = \left[-\frac{p'r^4}{10} + \sum b_n r^{n+1}P_n'(\cos\theta)\right]\sin^2\theta, \tag{3}$$

Решение уравнения (1) во внешнем пространстве, где отсутствуют токи, но имеется однородное магнитное поле $B_e = B_{0e}\mathbf{e}_z$

$$\psi_e = \left[\frac{B_{0e}r^2}{2} + \sum\frac{c_n}{r^n}P_n'(\cos\theta)\right]\sin^2\theta. \tag{4}$$

Функции $f_n(z)$ и $P_n'(x)$ представляются формулами

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z} - \cos z, \quad f_2(z) = \frac{3}{z}f_1(z) - \sin z, \quad f_3(z) = \frac{15}{z^2}f_1(z) - \frac{6}{z}\sin z + \cos z, \ldots,$$

$$P_1'(x) = 1, \quad P_2'(x) = 3x, \quad P_3'(x) = 3/2(5x^2 - 1), \ldots .$$

2. Равновесие и устойчивость плазменных эллипсоидов при $j = j_\varphi = r\sin\theta p'$

а. В случае азимутальных токов, ограничиваясь одной первой гармоникой (3) и потребовав ее непрерывности с внешним полем (4) на поверхности сферы $r = R$, $\psi = 0$, получим равновесную функцию ψ вида

$$\psi = \frac{B_0}{2}\left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right)\sin^2\theta, \quad \psi_e = \frac{B_{0e}}{2}\left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right)\sin^2\theta, \quad B_{0e} = -\frac{2}{3}B_0, \tag{5}$$

где $B_0 = B_z(0,\theta)$. Это решение известно в гидродинамике как вихрь Хилла. При использовании двух гармоник (3) (первой и третьей) можно получить внутреннее решение для ψ, обращающегося в нуль на поверхности эллипсоида. В цилиндрических координатах r, φ, z оно имеет вид

$$\psi = \frac{p'}{8}\frac{1}{1+1/\nu^2}\Psi(r,z), \quad \Psi(r,z) = r^2(2R_0^2 - r^2 - 4z^2/\nu^2), \tag{6}$$

где $\nu = l_z/l_r$ – отношение полуосей эллиптических поперечных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси $r = R_0$. Граничной поверхностью Σ, на которой $\psi(r,z) = 0$, является эллипсоид вращения, проходящий через точки $r = R$, $z = \nu_\Sigma R$, причем $R^2 = 2R_0^2$, $\nu_\Sigma = \nu/2$. Распределение давления описывается формулой

$$p = p_0 + 2B_0^2\left(1 + \frac{1}{4\nu_\Sigma^2}\right)\frac{r^2}{R^2}\left[1 - \frac{1}{R^2}\left(r^2 + \frac{z^2}{\nu_\Sigma^2}\right)\right]. \tag{7}$$

Давление максимально на магнитной оси $r = R_0$ и совпадает с внешним давлением p_0 в центре эллипсоида. Магнитные поверхности для случая вытянутого эллипсоида и распределение давления в плоскости $z = 0$ показаны на рис.1. Функцию $\psi = rA_\varphi$ для внешнего магнитного поля можно вычислить интегрированием по токам, причем однородная составляющая B_{ze} определяется из требования $B_z = 0$ в седловой особой точке $r = 0$, $z = \nu_\Sigma R$ граничной магнитной поверхности.

б. Равновесная конфигурация (6) относится к классу конфигураций с замкнутыми силовыми линиями магнитного поля. Для исследования ее устойчивости примени́м общегеометрический необходимый критерий Шпиза [4]. Для рассматриваемого случая аксиальной симметрии при $j = j_\varphi$, $B_\varphi = 0$ такой критерий был впервые получен в работе Бернштейна и др. [5]. Согласно этому критерию, область устойчивости определяется неравенством

$$\Lambda = -p'\left(\gamma p\frac{V''}{V} - p'\right) > 0, \tag{8}$$

где V – текущий объем, отсчитываемый от магнитной оси тороидальной равновесной конфигурации, штрихами обозначены производные по ψ, γ – показатель адиабаты. Переходя к производным по Ψ и подставив $p = p_0 + p'\psi$, получим

$$\Lambda = -\beta p'^2\left[\frac{\gamma V''(\Psi)}{V'(\Psi)}\left(1 + \frac{\Psi}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta}\right], \tag{9}$$

где

$$\beta = \frac{8p_0(1+1/\nu^2)}{p'^2R_0^4} = \frac{2p_0}{(1+1/\nu^2)B_0^2},$$

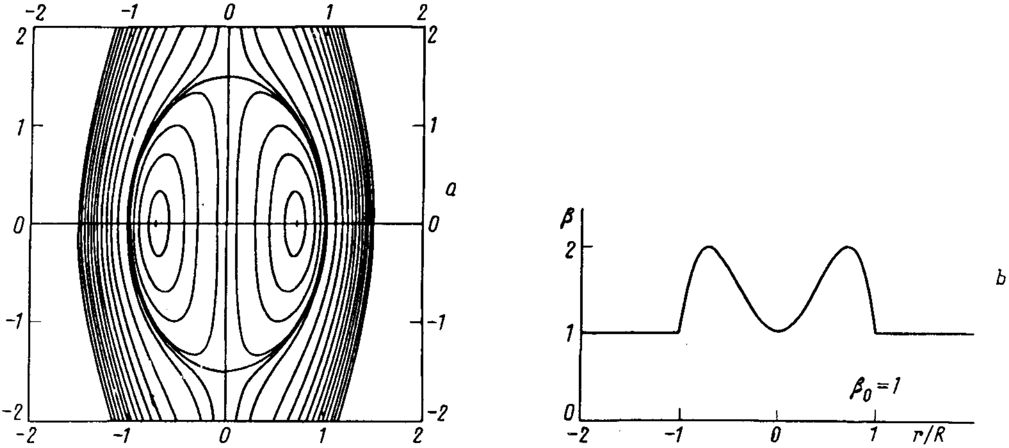


Рис.1.

p_0 – внешнее давление, B_0 – магнитное поле в центре шара. (В системе CGS $\beta = 8\pi p_0/(1+1/\nu^2)B_0^2$). Выражение для удельного объема $V'(\Psi)$ получается путем интегрирования вдоль магнитных силовых линий:

$$V'(\Psi) = \int \frac{rdr}{\partial\Psi/\partial z} = \int \frac{dr}{[2R_0^2 r^2 - r^4 - 4\Psi/\nu^2]^{1/2}} = \int \frac{dr}{[(r^2 - r_2^2)(r_1^2 - r^2)]^{1/2}},$$

где $r_{1,2}^2/R_0^2 = 1 \pm \sqrt{1-\Psi}$. Отсюда видно, что удельный объем и "магнитная яма" выражаются через полные эллиптические интегралы:

$$V'(\Psi) = \frac{2K(k)}{r_2}, \quad \frac{V''(\Psi)}{V'(\Psi)} = \frac{(2-k^2)^2}{8k^2}\left\{1 + \frac{2-k^2}{k^2}\left[1 - \frac{E(k)}{(1-k^2)K(k)}\right]\right\}, \tag{10}$$

где $k = \sqrt{1 - r_2^2/r_1^2}$. На магнитной оси $r = R_0$, $\Psi = 1$, $k = 0$ и соответственно $-V''/V' = 3/16$, и при $\gamma = 5/3$ критерий (9) дает $\beta > 2,2$. На граничной сепаратрисной поверхности Σ $k \to 1$, $k' = \sqrt{1-k'^2} \to 0$ и $-V''/V' \to 1/8k'^2 \ln(4/k') \to \infty$. Таким образом, область устойчивости в окрестности магнитной оси появляется лишь при достаточно большом $\beta > 2,2$, а при $\beta < 2,2$ устойчивая зона имеется только в окрестности граничной поверхности Σ, и ее ширина стремится к нулю при $\beta \to 0$ (см. рис.2).

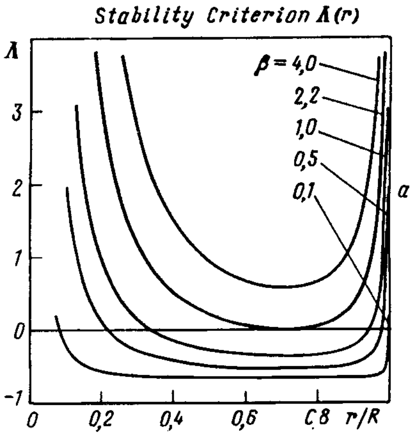
3. О равновесии и устойчивости плазмоидов, содержащих все три компоненты плотности тока

а. Если ограничиться первой меридиональной модой $n = 1$, то, согласно (2), решение, удовлетворяющее граничному условию $\psi(R,\theta) = 0$ на поверхности сферы $r = R$, запишется в виде

$$\psi = a_0\left[r^2 - \frac{R^2 f_1(\alpha r)}{f_1(\alpha R)}\right]\sin^2\theta, \quad \psi_e = \frac{B_{0e}}{2}\left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right)\sin^2\theta, \tag{11}$$

где

$$a_0 = -\frac{p'}{\alpha^2} = \frac{B_0/2}{1 - \alpha^2 R^2/3f_2(\alpha R)}, \quad B_{oe} = \frac{2a_0\alpha R f_2(\alpha R)}{3f_1(\alpha R)}.$$



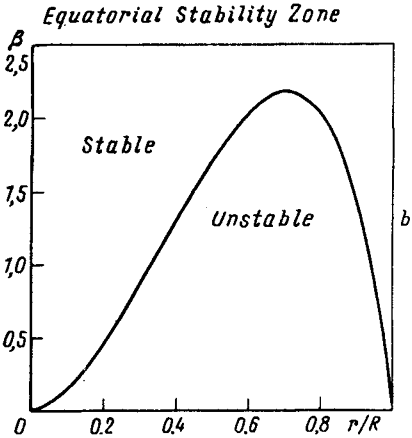


Рис.2.

Распределение давления внутри сферы $r = R$ определяется формулами

$$p = p_o - \frac{p'^2}{\alpha^2}\Psi(r)\sin^2\theta, \qquad \Psi(r) = r^2 - \frac{R^2 f_1(\alpha r)}{f_1(\alpha R)}. \tag{12}$$

При $f_2(\alpha R) = 0$ внешнее магнитное поле обращается в нуль. Магнитные поверхности ψ=const различных радиальных мод представляют собой системы вложенных торов, разделенных сферическими сепаратрисами. Конфигурация, соответствующая второй радиальной моде, и распределение давления $p(r)$ в средней плоскости $\theta = \pi/2$ представлены на рис.3. В отличие от предыдущего случая, давление внутри граничной сферы Σ может быть как больше, так и меньше внешнего давления. Среднее по объему давление внутри плазмоида равно

$$< p >= p_0 - \frac{9 f_1(\alpha R) B_{0e}^2}{4\pi f_2^2(\alpha R)} \left[1 - \frac{5 f_2(\alpha R)}{\alpha R f_1(\alpha R)}\right]. \tag{13}$$

Оно также может быть как больше, так и меньше внешнего давления p_0. Для плазмоида, изображенного на рис.3, $< p > /p_0 = 0,56$, а для существования равновесной конфигурации с $p \geq 0$ необходимо $\beta = 8\pi p_0/B_{0e}^2 > 3,7$.

Плазмоид, имеющий сфероидальную граничную поверхность, можно получить суперпозицией первой и третьей меридиональных мод $n = 1$ и $n = 3$:

$$\psi = -\frac{p'}{\alpha^2}[r^2 - a_1 f_1(r) - a_3 f_3(r)(1 - 5\cos^2\theta)]\sin^2\theta. \tag{14}$$

При этом коэффициенты a_1 и a_3 определяются из условия прохождения граничной поверхности $\psi = 0$ через окружность $r = R$, $\theta = \pi/2$ и точки $r = z$, $\theta = 0, \pi$:

$$a_1 = [R^2 f_3(z) + 4z^2 f_3(R)]/D, \qquad a_3 = [R^2 f_1(z) - z^2 f_1(R)]/D,$$

$$D = 4 f_1(R) f_3(z) + f_1(z) f_3(R).$$

Для $z = R$ отсюда следует $a_3 = 0$ и мы возвращаемся к конфигурации (11) со сферической граничной поверхностью $r = R$.

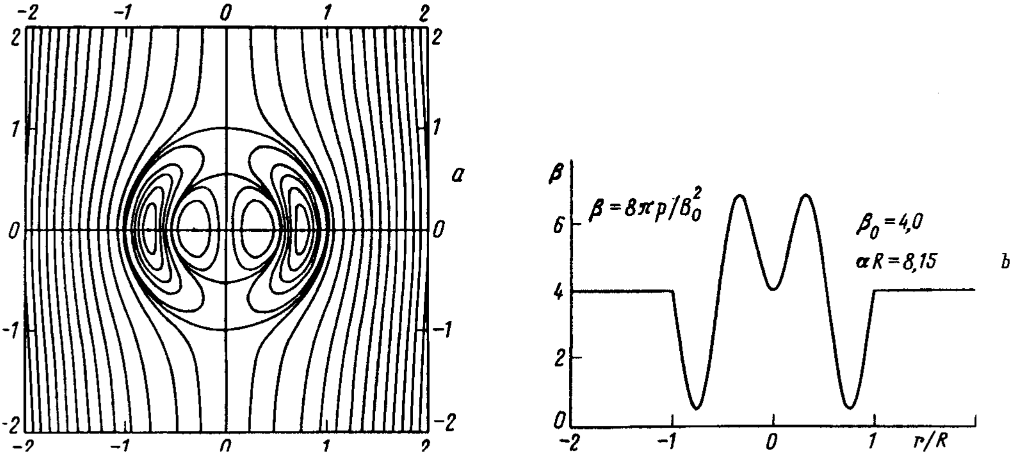


Рис.3.

б. Равновесные конфигурации (11) и (14) относятся к общему случаю применимости необходимого критерия устойчивости Мерсье [6]. Устойчивость по Мерсье аксиально-симметричных конфигураций в окрестности магнитной оси $r = R_0$, если равновесная конфигурация представлена разложением

$$\psi - \psi_0 = -\frac{R_0^2}{2}\frac{p'}{1+\nu^2}\left\{\left(1 + c\frac{r^2 - R_0^2}{R_0^2}\right) z^2 + \frac{\nu^2}{4R_0^2}(r^2 - R_0^2)^2 - \frac{c-1}{12R_0^4}(r^2 - R_0^2)^3\right\},$$

определяется условием [7]

$$p'(V)\left\{\frac{j_\varphi^2 R_0^2}{B_\varphi^2} - \frac{(\nu^2+1)^2}{\nu^4}\left[1 + 2\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}(1+2c)\right]\right\} > 0. \qquad (15)$$

Здесь j_φ и B_φ – азимутальные составляющие плотности тока и магнитного поля на магнитной оси $r = R_0$ $\theta = \pi/2$, а c – характеристика треугольности поперечных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси. Для конфигурации с круглыми приосевыми сечениями ($\nu = 1$) и спадающим от оси давлением $p'(V) < 0$ из (15) следует известное ограничение $j_\varphi R_0/B_\varphi < 2$.

Для равновесной конфигурации (11) положение экстремумов $r = R_0$ функции $\psi(r,\theta)$ и значения входящих в (15) параметров выражаются через функции $f_1(\alpha r)$ и $f_2(\alpha r)$ при $r = R_0$:

$$\alpha R^2 f_1'(\alpha r)/2r f_1(\alpha R) = 1,$$

$$f_1' = \frac{2f_1}{\alpha r}, \quad \nu^2 = \frac{\alpha r f_1}{f_2} - 1, \quad c = \frac{\alpha r f_1}{2f_2} - \frac{3}{2}, \quad \frac{j_\varphi r}{B_\varphi} = \frac{2f_1}{f_2}.$$

Таким образом, критерий устойчивости конфигурации (11) можно выразить через параметр эллиптичности $\nu = l_z/l_r$ поперечных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси:

$$p'(V)\left[\frac{4\nu^4}{\alpha^2 r^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} - \frac{(1-\nu^2)^2}{1+\nu^2}\right] > 0 \qquad (16)$$

Производная $p'(V)$ положительна в минимуме функции $p(r, \pi/2)$ и отрицательна в максимуме. В случае плазмоида, изображенного на рис.3, конфигурация неустойчива в окрестности внутренней магнитной оси $r = R_{01}$ и устойчива в окрестности второй магнитной оси $r = R_{02} > R_{01}$. Формула (15) показывает, что при $p'(V) < 0$ более устойчивы конфигурации с малыми ν. Соответствующие малые отношения l_z/l_r, очевидно, будут в сплюснутых эллипсоидах описывающихся ψ-функцией (14). Вывод о большей устойчивости сплюснутых "сферомаков" согласуется с результатом, полученным в [8] для конфигураций, близких к бессиловым $p' = 0$.

Заключение

Исследованный класс ограниченных аксиально-симметричных равновесных конфигураций содержит конфигурации, имеющие устойчивые слои в окрестности граничной поверхности. Используя произвольность распределения плотности, можно предположить, что максимальная плотность сосредоточена в устойчивых областях. Таким образом, показана возможность существования ограниченных равновесных конфигураций с повышенной плотностью и, соответственно, пониженной температурой в слое, примыкающем к сепаратрисной граничной поверхности. К таким конфигурациям относятся шлемовидные образования, подобные лучам солнечной короны [9]. Сфероидальные конфигурации (6) и (11) показывают принципиальную возможность существования равновесного плазмоида Кучми [10], удерживаемого давлением внешнего однородного магнитного поля и окружающей сфероид плазмы.

Авторы признательны С.Л.Кучми и М.М.Молоденскому за постановку задачи и плодотворные идеи.

---

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. М.: "НАука", 1982, с.322-327.
2. S.Chandrasekhar, PROC. Nat. Acad. Sc. **42**, 1 (1956).
3. K.H.Prendergast, J.Astrophys. J. **123**, 498 (1956).
4. G.O.Spies, Phys. Fluids **17**, 400 (1974).
5. I.Bernstein, E.Frieman, MKruskal, and R.Kulsrud, Proc. Roy. Soc. **A 244**, 17 (1958).
6. C.Mercier, Nucl. Fus. **1**, №3, 213 (1964).
7. Л.С.Соловьев, В сб. Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат **6**, 210 (1972).
8. M.N.Rosenbluth and M.N.Bussak, Nucl. Fus. **19**, 489 (1979).
9. С.Л.Кумчи, В.А.Кутвицкий, М.М.Молоденский, Л.С.Соловьев, АЖ **71**, №3, 1 (1994).
10. S.Koutchmy, M.Belmahdi, R.L.Coulter et al., Institut d'Astrophysique de Paris. Prepublication **425**, Octobre, 1 (1993).