РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 59, ВЫПУСК 9
10 МАЯ, 1994

Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.9, стр.561 - 564

ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

И.М.Дремин

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 марта 1994 г.

Предлагается новый метод анализа распределений частиц по множественности в неупругих процессах, основанный на использовании нецелочисленных моментов распределений. В общем случае, метод может быть использован для анализа любых распределений, встречающихся в физике или математике.

Цель данной работы состоит в том, чтобы продемонстрировать эффективность обобщения понятия моментов распределений на моменты нецелочисленных порядков с помощью методов дробного дифференцирования [1,2]. Хотя анализ с использованием дробных моментов может проводиться для распределений, встречающихся в любых областях физики и математики, мы будем подчеркивать его применение к процессам множественного рождения частиц при высоких энергиях.

Пусть имеется нормированное распределение вероятностей P_n $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1)$. В частности, это может быть распределение вероятностей появления событий с n частицами при множественном рождении. Определим производящую функцию этого распределения $G(z)$ как

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+z)^n P_n. \tag{1}$$

Факториальные моменты и кумулянты целого порядка q определены формулами:

$$F_q = \frac{\sum\limits_n P_n n(n-1)...(n-q+1)}{(\sum_n P_n n)^q} = \frac{1}{\langle n\rangle^q}\frac{d^q G(z)}{dz^q}\bigg|_{z=0}, \tag{2}$$

$$K_q = \frac{1}{\langle n\rangle^q}\,\frac{d^q \ln G(z)}{dz^q}\bigg|_{z=0}, \tag{3}$$

где $\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n n$ – средняя множественность. Они связаны рекуррентными соотношениями:

$$F_q = \sum_{m=0}^{q-1} \frac{(q-1)!}{m!(q-m-1)!} K_{q-m} F_m. \tag{4}$$

Определения (2) и (3) можно обобщить на нецелые значения порядка q с помощью формул (обобщенного) дробного дифференциального исчисления [1], где роль q-той производной играет

$$D_z^q G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1+z)^{m-q} G^{(m)}(-1)}{\Gamma(m-q+1)}. \tag{5}$$

Здесь $G^{(m)}$ – обычные (целочисленные) производные. Применим это обобщенное правило дифференцирования для вычисления дробных моментов некоторых широко используемых распределений.

1. *Распределение Пуассона*:

$$P_n = \frac{\langle n\rangle^n}{n!} e^{-\langle n\rangle} \qquad \text{и} \qquad G(z) = e^{z\langle n\rangle}. \tag{6}$$

Используя (5), имеем:

$$F_q = \frac{e^{-\langle n\rangle}}{\langle n\rangle} \frac{\Phi(1, 1-q; \langle n\rangle)}{\Gamma(1-q)}, \tag{7}$$

$$K_q = \frac{q}{\langle n\rangle^{q-1}\Gamma(2-q)}, \tag{8}$$

$$H_q \equiv \frac{K_q}{F_q} = \langle n\rangle e^{\langle n\rangle} \frac{q}{1-q} \frac{1}{\Phi(1, 1-q; \langle n\rangle)}, \tag{9}$$

где Φ – вырожденная гипергеометрическая функция. В целых точках, как и следовало, $F_q = 1$, $K_q = H_q = \delta_{q1}$. В промежутках между целыми точками как F_q, так и H_q осциллируют. Это особенно просто увидеть из формулы (8), учитывая поведение обратной гамма-функции. Здесь же видно, что амплитуда осцилляций быстро падает с ростом средней множественности $\langle n\rangle$. При больших множественностях все моменты почти равны их значениям в целых точках. Теоретический интерес может представить лишь область $q > \langle n\rangle$, где осцилляции заметны. Однако практически эта область труднодоступна для экспериментального изучения из-за больших ошибок измерений.

2. *Фиксированная множественность.*

$$P_n = \delta_{nn_0}, \quad G(z) = (1+z)^{n_0}. \tag{10}$$

Это распределение может представлять интерес, если, например, специально отбираются только события с заданной множественностью. Опять-таки, используя (5), находим:

$$F_q = \frac{n_0^{1-q}}{\Gamma(1-q)} B(n_0, 1-q), \tag{11}$$

$$K_q = \frac{n_0^{1-q}}{\Gamma(1-q)} [\psi(1) - \psi(1-q)], \tag{12}$$

$$H_q = \frac{\psi(1) - \psi(1-q)}{B(n_0, 1-q)} \quad , \tag{13}$$

где B – бета-функция Эйлера, ψ – логарифмическая производная гамма-функции. Здесь особенно наглядно виден переход к значениям в целых точках [3], где

$$F_q^{(i)} = n_0^{1-q} \frac{\Gamma(n_0)}{\Gamma(n_0 - q + 1)} = \frac{n_0(n_0-1)...(n_0-q+1)}{n_0^q} \quad , \tag{14}$$

$$K_q^{(i)} = (-n_0)^{1-q}\Gamma(q) = (-n_0)^{1-q}(q-1)!\,, \tag{15}$$

$$H_q^{(i)} = (-1)^{1-q} n_0 B(q, n_0 - q + 1). \tag{16}$$

Видно, что кумулянты меняют знак на каждом последующем целом q. Вторая часть (14) четко воспроизводит определение (2). Отсюда же видно, что (14) точно совпадает с аналитическим продолжением (11) на нецелые q. В то же время формула (12) показывает, что простое "аналитическое" продолжение кумулянтов (15) на нецелые q было бы неверным, хотя (12) и переходит в (15) при целых q. Чтобы получить правильное выражение, надо использовать формулу (5). При больших множественностях n_0 имеем $F_q \to 1$, $K_q \to H_q \to 0$, как и в случае пуассоновского распределения.

3. *Отрицательное биномиальное распределение.* Это распределение представляет наибольший интерес, так как им часто аппроксимируют экспериментально измеряемые распределения в процессах множественного рождения частиц:

$$P_n = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k)} \left(\frac{\langle n \rangle}{k}\right)^n \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{k}\right)^{-n-k}, \quad G(z) = \left(1 - z\frac{\langle n \rangle}{k}\right)^{-k}. \tag{17}$$

Отсюда нетрудно вычислить:

$$F_q = \frac{(kx)^k}{\langle n \rangle^{q+k}} \frac{F(1, k; 1-q; x)}{\Gamma(1-q)} \quad , \tag{18}$$

$$K_q = \frac{k}{\langle n \rangle^q \Gamma(1-q)} \left[\frac{x}{1-q} F(1, 1; 2-q; x) + \ln\left(\frac{kx}{\langle n \rangle}\right)\right], \tag{19}$$

$$H_q = k\left(\frac{\langle n \rangle}{kx}\right)^k \frac{\frac{x}{1-q}F(1,1;2-q;x) + \ln\frac{kx}{\langle n \rangle}}{F(1,k;1-q;x)}. \tag{20}$$

Здесь F – гипергеометрическая функция, $x = \frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + k}$. При целых q имеем из (18) – (20) (см. [3])

$$F_q^{(i)} = \frac{\Gamma(k+q)}{k^{q-1}\Gamma(k+1)} \quad , \tag{21}$$

$$K_q^{(i)} = \frac{\Gamma(q)}{k^{q-1}} \quad , \tag{22}$$

$$H_q^{(i)} = \frac{\Gamma(q)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+q)} = kB(q, k). \tag{23}$$

Эти формулы выписаны в таком виде, чтобы задать гладкую интерполяцию между целыми значениями q и K. Истинные зависимости моментов, даваемые формулами (18) – (20), содержат еще дополнительные осцилляции, наложенные на эту гладкую интерполяцию. К сожалению, выражения (18)–(20) не наглядны, и для выявления осцилляций, вообще говоря, нужны численные расчеты. Однако в предельном случае больших множественностей эти осцилляции можно продемонстрировать аналитически. Действительно, в пределе $\langle n\rangle \gg 1$ нетрудно показать, что отношения истинных моментов к их интерполяциям (21)–(23) ведут себя как

$$F_q/F_q^{(i)} \to 1, \tag{24}$$

$$K_q/K_q^{(i)} \to 1 - \frac{k}{\langle n\rangle^q}\frac{\sin\pi q}{\pi}\ln\frac{\langle n\rangle}{k}, \tag{25}$$

$$H_q/H_q^{(i)} \to 1 - \frac{k}{\langle n\rangle^q}\frac{\sin\pi q}{\pi}\ln\frac{\langle n\rangle}{k}. \tag{26}$$

Как и в случае пуассоновского распределения, осцилляции нецелочисленных моментов вымирают с ростом множественности. Это видно из поведения второго слагаемого в кумулянтах. Оно исчезает в целых точках и осциллирует между ними с амплитудой, уменьшающейся с ростом средней множественности и уменьшением "числа источников" K. Такое же поведение факториальных моментов впервые было обнаружено в работе [2] численными расчетами.

Практическое применение в процессах множественного рождения рассмотренные осцилляции могут найти, следовательно, только при изучении распределений с большим значением k и/или малой средней множественностью. К числу таких относятся распределения частиц в малых объемах фазового пространства, интерес к которым особенно возрос в связи с идеями перемежаемости и фрактальности (см. обзор [4]). Уменьшение средней множественности сопровождается увеличением флуктуаций в малых интервалах быстрот и благоприятствует изучению указанных выше осцилляций. Это добавит новую информацию в явление перемежаемости. В общем случае такой анализ может оказаться полезным в тех областях физики, где имеют дело с большими скоплениями ($k \gg 1$) слабых ($\langle n\rangle \ll k$) независимых источников. Получаемые в этом случае результаты оказываются весьма чувствительными к конкретной форме распределений и могут служить критерием для ее правильного выбора.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93-02-3815), грантами НАТО (CRG 930025) и Сороса.

---

1. K.Oldham, The Fractional Calculus, Academic Press, Orlando, 1974.
2. E.M.Friedlander and I.Stern, Preprint LBL-31354, 1991 (unpublished).
3. I.M.Dremin and R.C.Hwa, Preprint OITS 531, 1993; Phys. Rev. D. (to be published, 1 June 1994).
4. Е.А.Де Вольф, И.М.Дремин, В.Киттель, УФН **163**, 3 (1993).