Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.9, стр.571 - 574

АСИМПТОТИКА МНОГОЦВЕТНОЙ КХД ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ И ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ СПИНОВЫЕ МОДЕЛИ

Л.Н.Липатов

Петербургский институт ядерной физики РАН

188350 Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 6 апреля 1994 г.

Рассмотрены вклады в редже́вские процессы многоцветной КХД от диаграмм с произвольным числом реджезованных глюонов в кроссинг-канале. Показано, что волновая функция, описывающая связанные состояния глюонов, имеет свойство голоморфной факторизации, а гамильтониан для каждой из двух голоморфных подсистем совпадает с гамильтонианом для точно решаемой решеточной модели, являющейся обобщением изотропного магнетика Гейзенберга.

Известно [1], что при больших энергиях $\sqrt{s}$ в главном логарифмическом приближении (ГЛП) $(q^2 \ln s \sim 1)$ глюон в квантовой хромодинамике реджезуется, а померон, являющийся связанным состоянием двух реджезованных глюонов, расположен в j-плоскости t-канала в точке $j = 1 + \omega$, где $\omega = \frac{g^2}{\pi^2} N \ln 2$ для калибровочной группы $SU(N)$. Хотя такой большой интерсепт затравочного померона, по-видимому, согласуется с недавними экспериментами по глубоко неупругому ep-рассеянию, при достаточно малых значениях бьеркенской переменной x необходимо унитаризовать результат ГЛП. Один из возможных путей унитаризации основан на эффективной теории поля для мультиреджевских процессов [2]. Другой, сравнительно простой, хотя и не столь универсальный, метод соответствует обобщению ГЛП, при котором учитываются диаграммы с произвольным, но сохраняющимся числом глюонов в кросинг-канале.

В предыдущей работе автора было показано [4], что в рамках этого метода соответствующее уравнение Бете–Солпитера для n реджезованных глюонов значительно упрощается в пределе большого числа цветов $N \to \infty$. В частности, волновая функция $f_\omega(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, ..., \vec{\rho}_n; \vec{\rho}_0)$ для связанного состояния $\psi_\omega(\rho_0)$ глюонов с координатами $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, ..., \vec{\rho}_n$ в двумерном поперечном пространстве $\vec{\rho}$ имеет важное свойство голоморфной факторизации:

$$f_\omega(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, ..., \vec{\rho}_n; \vec{\rho}_0) = \sum_r f^r(\rho_{10}\rho_{20}, ..., \rho_{no}) \tilde{f}^r(\rho^*_{10}\rho^*_{20}, ..., \rho^*_{n0}), \tag{1}$$

где $f^r(\tilde{f}^r)$ являются аналитическими (антианалитическими) функциями разностей $\rho_{ij} = \rho_i - \rho_j (\rho^*_{ij} = \rho^*_i - \rho^*_j)$ комплексных координат глюонов. Эти функции удовлетворяют независимым уравнениям Шредингера:

$$\epsilon f^r = H f^r, \qquad \tilde{\epsilon} \tilde{f}^r = H^* f^r, \tag{2}$$

где $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ есть соответствующие "энергии", через которые легко может быть вычислено положение сингулярностей t-канальной парциальной волны f_ω: $\omega = -\frac{g^2}{16\pi^2} N(\epsilon + \tilde{\epsilon})$, определяющее асимптотику $A(s,t) \sim s^{1+\omega}$ амплитуд рассеяния.

Гамильтониан H для голоморфной подсистемы дается формулой

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_{i,i+1}, \tag{3}$$

где $i=n+1$ и $i=1$ эквивалентны. Парный гамильтониан $H_{i,i+1}$ может быть записан в двух эквивалентных формах [4]:

$$H_{ik}=P_i^{-1}\ln(\rho_{ik})P_i+P_k^{-1}\ln(\rho_{ik})+\ln(P_iP_k)-2\psi(1)=2\ln(\rho_{ik})+\rho_{ik}\ln(P_iP_k)\rho_{ik}^{-1}-2\psi(1), \tag{4}$$

где $P_k=i\frac{\partial}{\partial\rho_k}$, $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $\psi(1)=-\gamma$, γ – константа Эйлера. Из формул (3), (4) следует, что транспонированный оператор H^T получается из гамильтониана H преобразованиями подобия (отвечающего двум различным нормировочным условиям для функции f^r в уравнении (2)):

$$H^T=P_n^{-1}P_{n-1}^{-1}...P_1^{-1}HP_1P_2...P_n=\rho_{12}\rho_{23}...\rho_{n1}H\rho_{12}^{-1}\rho_{23}^{-1}...\rho_{n1}^{-1}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что существует дифференциальный оператор A, коммутирующий с гамильтонианом H [4]:

$$A=\rho_{12}\rho_{23}...\rho_{n1}P_1P_2...P_n,\qquad [A,H]=0. \tag{6}$$

Оказывается [5], имеется более общая взаимно коммутирующая система операторов $t(\theta)$:

$$t(\theta)=\mathrm{tr}T(\theta)=T(\theta)_{11}+T(\theta)_{22},\quad [t(v),t(u)]=0, \tag{7}$$

где $T(\theta)$ есть матрица монодромии в двумерном спиновом пространстве:

$$T(\theta)=L_{\rho1}(\theta)L_{\rho2}(\theta)...L_{\rho n}(\theta), \tag{8}$$

$$L_\rho(\theta)=\theta+\begin{pmatrix}\rho\partial & \partial\\ -\rho^2\partial & -\rho\partial\end{pmatrix}.$$

Коэффициенты разложения $t(\theta)$ (7) в ряд по спектральному параметру θ включают оператор A (6) и оператор Казимира конформной группы:

$$t_2=\sum_{i<j}\rho_{ik}^2P_iP_k. \tag{9}$$

Гамильтониан (3) и трансфер-матрица (7) инвариантны относительно конформной группы преобразований:

$$\rho_i\to\frac{a\rho_i+b}{c\rho_i+d} \tag{10}$$

с любыми комплексными параметрами a,b,c,d.

Ниже мы покажем, что операторы (7) коммутируют с гамильтонианом (3) и, следовательно, уравнения Шредингера (2), описывающие динамику движения n частиц на двумерной плоскости, содержат достаточное количество квантовых законов сохранения, чтобы быть точно решаемыми.

Свойство взаимной коммутации операторов (7) следует из того факта, что матрица монодромии (8) удовлетворяет фундаментальному коммутационному соотношению (ФКС) [6]:

$$T(v)_{i_1i_1''}T(u)_{i_2i_2''}(u-v+P_{12})_{i_1'i_2'}^{i_1''i_2''}=(u-v+P_{12})_{i_1i_2}^{i_1''i_2''}T(u)_{i_2''i_2'}T(v)_{i_1''i_1'}, \tag{11}$$

где $(P_{12})_{i_1i_2}^{i_1'i_2'}=\delta_{i_1}^{i_2'}\delta_{i_2}^{i_1'}$ есть оператор перестановки индексов. Матрица $L^{1/2}(\theta)=$ $=\theta+P_{12}$ есть L-оператор для изотропного магнетика Гейзенберга, совпадающего с так называемой XXX-моделью [6]. $T(\theta)$ (8) имеет физическую интерпретацию матрицы монодромии для спиновых систем с взаимодействием $\vec{\sigma}$M, где матрица Паули $\vec{\sigma}$ связывает соседние индексы на ребрах двумерной решетки в горизонтальном направлении, а дифференциальный оператор M ($M_3 = \rho\partial$, $M_- = \partial$, $M_+ = -\rho^2\partial$) действует в квантовом подпространстве, отвечающем вертикальным ребрам решетки. В качестве гамильтониана H для евклидовых переменных ρ_i в квантовом подпространстве можно выбрать любую функцию от коммутирующих операторов $t(\theta)$. Естественным условием для этой функции является условие локальности гамильтониана, то есть взаимодействие ближайших соседей с координатами ρ_i и ρ_{i+1}. Общий метод построения такого гамильтониана, коммутирующего с $t(\theta)$ (7), известен (см. [6]). Сначала нужно построить матрицу монодрамии в виде произведения L-операторов, действующих в квантовом и дополнительном пространствах той же размерности. В нашем случае дополнительное пространство должно быть одномерным, так что L-оператор есть интегральный оператор, действующий в прямом произведении квантового (ρ_1) и дополнительного (ρ_2) подпространств. Он должен иметь следующее разложение по спектральному параметру θ:

$$L_{12}(\theta) = P_{12}(1 - \theta H_{12} + 0(\theta^2)), \tag{12}$$

где P_{12} – оператор перестановки координат (ρ_1) и (ρ_2), а H_{12} есть искомый парный гамильтониан. Полный гамильтониан H выражается через сумму парных гамильтонианов H_{ii+1} согласно формуле (3) [6]. Таким образом, для проверки коммутивности H и $t(\theta)$ достаточно доказать, что H_{12} в формулах (4) и (12) совпадают. Известно [6], что оператор L_{12} (12) должен удовлетворять линейному уравнению, аналогичному соотношению ФКС (11):

$$L_{\rho_1}(v)L_{\rho_2}(u)L_{12}(u-v) = L_{12}(u-v)L_{\rho_2}(u)L_{\rho_1}(v), \tag{13}$$

где операторы $L_\rho(\theta)$ приведены выше (см. (8)). В формуле (13) подразумевается умножение этих операторов как матриц 2×2 и свертка их с искомыми операторами $L_{12}(\theta)$ по координатам ρ_1, ρ_2. В частности, из уравнения (13) следует, что генераторы конформных преобразований (10) коммутируют с L_{12} и, следовательно, H_{12} может зависеть только от оператора Казимира

$$\mathrm{M}_{12}^2 = -\rho_{12}^2\partial_1\partial_2 \tag{14}$$

конформной группы. Из матричного уравнения (13) можно получить следующее операторное соотношение:

$$\rho_{12}(\partial_1^{-1} - \partial_2^{-1})\rho_{12}^{-1} - [H_{12}, \rho_{12}] = 0. \tag{15}$$

Легко проверить окончательно, что выражение (4) для $H_{12}(\mathrm{N}_{12}^2)$ является с точностью до аддитивной константы общим решением уравнения (16).

Таким образом, выше было показано, что операторы (7) коммутируют друг с другом и с гамильтонианом (3) и задача решения уравнений Шредингера (2) для связанного состояния n реджезованных глюонов сводится к нахождению представления алгебры Янга – Бакстера (11). Обычный метод построения представления алгебры (11) основан на квантовой версии обратной задачи рассеяния, разработанной Фаддеевым и его сотрудниками [6]. В данном случае дополнительная трудность решения данной проблемы будет связана с некомпактностью группы Мебиуса (10).

В заключение отметим, что замечательные математические свойства уравнений (2), по-видимому, объясняются тем фактом, что теория Янга–Миллса является низкоэнергетическим пределом структурной теории, имеющей высокую группу симметрии.

Автор благодарен А.П.Бухвостову, Г.Дамену и другим участникам теоретических семинаров ПИЯФ и Зигенского Университета за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований грант 92-02-16809.

---

1. E.A.Kuraev, L.N.Lipatov, and V.S.Fadin, Sov. Phys. JETP **44**, 443 (1976); **45**, 199 (1977).
2. L.N.Lipatov, Sov. Phys. JETP **63**, 904 (1986). R.Kirschner, L.N.Lipatov, and L.Szymanowski, Препринт SI94-1 Зигенского Университета.
3. J.Bartels, Nucl. Phys. **B175**, 365 (1980). J.Kwiecinski and M.Praszalowicz, Phys. Lett. **B94**, 413, (1980).
4. L.N.Lipatov, Phys. Lett. **B309**, 394 (1993).
5. L.N.Lipatov, препринт DFPD/93/TH/70 университета в Падуе.
6. L.D.Faddeev, SFB 288 Preprint No70, Berlin.