Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.9, стр.593 - 598 ©1994 г. 10 мая

НОВЫЙ ТИП УЕДИНЕННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

В.П.Лукомский

Институт физики АН Украины

252650 Киев, Украина

Поступила в редакцию 9 ноября 1993 г.

После переработки 28 февраля 1994 г.

В рамках плоской задачи гидродинамики получено новое нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее гравитационные волны на свободной поверхности идеальной жидкости бесконечной глубины. Найдены точные решения в виде уединенных волн с существенно немонотонной зависимостью поля скорости от расстояния до поверхности. Потенциальное течение, связанное с такой волной, содержит движущиеся локальные вихревые особенности как внутри жидкости, так и вне ее. Для безвихревых течений произведено обобщение на случай жидкости конечной глубины.

1. Уединенные гравитационные волны на свободной поверхности жидкости детально исследованы только в рамках теории мелкой воды, где распределение амплитуды скорости по толщине близко к однородному. В такой постановке предложено большое количество нелинейных модельных уравнений, основными из которых являются уравнения Буссинеска и Кортевега-де Вриза [1]. На глубокой воде, начиная с классических работ Стокса, исследовались преимущественно периодические волны конечной амплитуды, их неустойчивость по отношению к длинноволновым модуляциям, а также образование солитонов огибающей, как конечный результат развития этой неустойчивости [2, 3]. И в нелинейной теории это по-прежнему классические поверхностные потенциальные волны с монотонным (экспоненциальным) убыванием амплитуды по мере удаления от поверхности. Уединенных волн в виде одиночных горбов или впадин на глубокой воде до настоящего времени теоретически не получено, хотя в открытом океане хорошо известны движения водной поверхности такого типа, называемые полосами слоя [4]. В настоящей работе в строгой пространственно двумерной постановке показана возможность существования вблизи свободной поверхности нового типа стационарных уединенных волн с локальной вихревой структурой.

2. Рассмотрим плоскую задачу о волнах на свободной поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости, находящейся в однородном поле тяжести. Декартову систему координат выбираем таким образом, чтобы ось OY была направлена вертикально вверх, а плоскость $y = 0$ совпадала с невозмущенной поверхностью жидкости. В области потенциального течения D^--потенциал $\phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа с соответствующими, в общем случае нелинейными, граничными условиями на свободной поверхности $y = \eta(x, t)$ [1]. Будем предполагать, что течение может содержать изолированные особые точки типа полюсов, так что область D^-, вообще говоря, многосвязна. Пусть интересующие нас возмущения слабонелинейны и имеют характерный пространственный масштаб l,

$$|\phi_{x,y}| \ll 1, \qquad |\eta| \ll 1 \ . \tag{1}$$

В квадратичном по амплитудам приближении сформулируем граничную задачу для полуплоскости $0 < y < -\infty$ путем сноса граничного условия с неизвестной поверхности $y = \eta(x, t)$ на плоскость $y = 0$:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \qquad x, y \in D^-, \tag{2}$$

$$\varphi_{tt} + \varphi_y + (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)_t - \varphi_t(\varphi_{tt} + \varphi_y)_y + \ldots = 0, \qquad y = 0, \tag{3}$$

$$\phi_t|_{y=-\infty} = 0. \tag{4}$$

Выражение для профиля $\eta(x, t)$ определяется из уравнения Бернулли

$$\eta(x, t) = -\varphi_t + \varphi_t\varphi_{ty} - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \ldots \tag{5}$$

Для потенциала ϕ и его производных, вычисленных при $y = 0$, изменено обозначение на φ. В теории потенциала, как известно [5], размерность граничной задачи по независимым переменным может быть понижена на единицу путем введения граничного значения потенциала, уравнением для которого является условие на свободной поверхности. Для этого в многосвязной области D^--плоскости $z = x + iy$ введем комплексный потенциал $W(z, t) = \phi(x, y, t) + i\psi(x, y, t)$ и функцию Келдыша [6] $S(z, t) = iW_{tt} - W'$, где ψ – функция тока, t – параметр, штрих – дифференцирование по z. Если их предельные значения при $y \to -0$ обозначить $W^-(x, t)$ и $S^-(x, t)$, граничное условие (3) можно представить в виде

$$\mathrm{Im} S^-(x, t) + (|W_x^-|^2)_t - \mathrm{Re} W_t^- \mathrm{Re} S_x^- + \ldots = 0. \tag{6}$$

Чтобы получить уравнение для восстановления аналитической функции $W(z, t)$ в многосвязной области $z \in D^-$, воспользуемся приемом линейной краевой задачи сопряжения [7]. Используя принцип симметрии Шварца, построим функции $W_*(z, t)$ и $S_*(z, t)$, аналитические в области D^+ в верхней полуплоскости: $W_*(z, t) = \overline{W(\overline{z}, t)}$ и $S_*(z, t) = \overline{S(\overline{z}, t)}$. Их предельные значения при $y \to +0$ равны, соответственно, $\overline{W^-(x, t)}$ и $\overline{S^-(x, t)}$, где черта над функцией означает комплексное сопряжение. Тогда с помощью кусочно-аналитической функции $G(z, t) = S_*(z, t)$, если $z \in D^+$ и $G(z, t) = S(z, t)$, если $z \in D^-$, граничное условие (6) может быть представлено как скачок функции $G(z, t)$ при переходе через действительную ось:

$$G^+ - G^- = 2i[(|W_x^-|^2)_t - \mathrm{Re} W_t^- \mathrm{Re} S_x^-]. \tag{7}$$

В нашем случае предполагается, что функция $W(z, t)$, а, следовательно, и $S(z, t)$, в области, занятой жидкостью, имеют только изолированные особенности полюсного характера, а бесконечно удаленная точка для них является обыкновенной точкой. Представим эти функции в виде суммы регулярной в нижней полуплоскости и полюсной частей: $W = W_R + W_P$ и $S = S_R + S_P$. Тогда аналитическая в области D^--функция $S_R(z, t)$ по скачку (7) и полюсам восстанавливается с помощью интеграла Коши:

$$S_R(z, t) + \overline{S_p(\overline{z}, t)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|W_\xi^-(\xi, t)|^2)_t - q(\xi, t)}{\xi - z} d\xi, \qquad z \in D^-, \tag{8}$$

где $q(x,t) = \mathrm{Re}W_t^- \mathrm{Re}S_x^-$. Соответственно предельные собственные функции $W^-(x,t)$ однородной граничной задачи (2)–(4) могут быть найдены из решения нелинейного уравнения размерности (1+1):

$$(W_R^- + \overline{W_P^-})_{tt} + i(W_R^- - \overline{W_P^-})_x + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|W_\xi^-(\xi,t)|^2)_t - q(\xi,t)}{\xi - x + i0} d\xi = 0. \qquad (9)$$

Начальная задача для этого уравнения может быть поставлена точно таким же образом, как это делается при исследовании движения тел под поверхностью жидкости, когда источники $W_P(z,t)$ считаются заданными [8]. Очевидно, что для слабонелинейных волн на глубокой воде, близких к линейным ($W_{tt}^- \approx -iW_x^-$), можно приближенно положить $q(x,t) = 0$. Такое модельное уравнение будем называть укороченным.

3. В частном случае, когда регулярная часть комплексного потенциала W_R^- есть рациональная функция с полюсами в верхней полуплоскости, будем искать стационарные рациональные решения укороченного уравнения (9) в виде единого для всей комплексной плоскости разложения по полюсам:

$$W_{(N_m)}^{(M)}(z,t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N_m} \frac{C_{nm}}{(z - \lambda t - z_m)^n}, \qquad z \in D^-, \qquad (10)$$

где $z_m = x_m + iy_m$ – координаты полюсов кратности N_m в комплексной плоскости, C_{nm} – их постоянные интенсивности, λ – спектральный параметр задачи, имеет смысл скорости движения многополюсного образования, исчезающего на бесконечности.

В силу масштабной инвариантности уравнения (9) положение одного из полюсов в решении (10) можно выбрать произвольно, а все остальные неизвестные параметры – при единственном условии, чтобы среди полюсов отсутствовали комплексно сопряженные пары, однозначно определяются из системы $M + \sum_{m=1}^{M} N_m$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$\lambda^2(n-1)C_{n-1,m} - iC_{nm} + 2\lambda \sum_{m'=1}^{M} B_n^{mm'} = 0, \qquad m = \overline{1,M}; \qquad n = \overline{1, N_m + 1}, \quad (11)$$

$$B_n^{mm'} = \sum_{k=0}^{N_m+1-n} \sum_{k'=1}^{N_{m'}} \frac{(-1)^k \binom{k+k'}{k} k'(k+n-1)}{(z_m - \bar{z}_{m'})^{k+k'+1}} C_{k+n-1,m} \overline{C}_{k'm'}. \qquad (12)$$

Исключительным свойством нелинейного укороченного уравнения (9) является существование у него решений вида (10) при любых натуральных значениях M и N_m! Для нахождения частных решений нелинейной алгебраической системы (11) использовался численный метод Ньютона. Мы исследуем здесь только одну серию точных решений, соответствующих комплексному потенциалу:

$$W^{(2M+1)}(z) = \frac{iC_{2,M}}{(z - \lambda t - iy_M)^2} + \sum_{m=-M}^{M} \frac{C_{1,m}}{z - \lambda t - iy_m}, \qquad z \in D^-. \qquad (13)$$

Все полюса расположены на одной вертикали, а нумерация их такова, что чем больше номер, тем он выше по вертикали. Полюса с отрицательными номерами и нулевым находятся в жидкости ($y_{-m} = -y_m$), а с положительными – вне ее. Полюс $m = M$ двукратный, остальные – простые. Для заданного M соответствующая система алгебраических уравнений (11) имеет порядок $4M + 3$. Для значений $M = \overline{1, 17}$ исследована серия решений, соответствующих симметричным уединенным волнам с одним гребнем. Установлено, что с ростом M амплитуда $\eta_{2M+1}(0)$ и скорость λ_{2M+1} волн монотонно убывают.

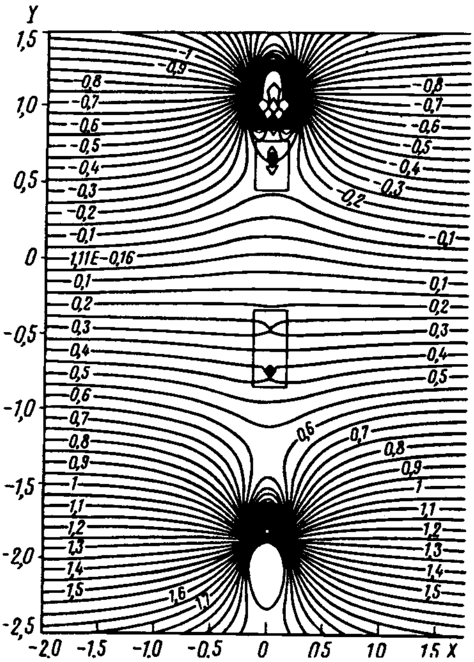

Рис.1

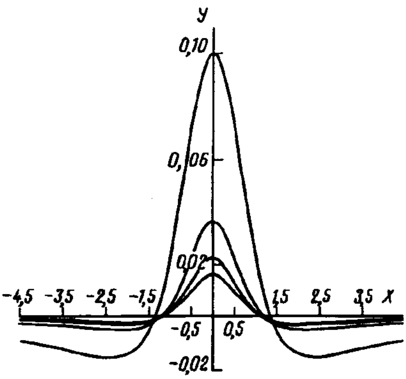

Рис.2

На рис.1 для $M = 2$ представлена картина линий тока, определяемая как мнимая часть комплексного потенциала в системе координат волны: $\psi = -\lambda^{(5)} y + \mathrm{Im} W^{(5)}(x, y)$. Прямоугольниками обведены простые полюса малой интенсивности с номерами $m = -1, 0, 1$. Нулевая линия тока по определению соответствует профилю свободной поверхности.

На рис.2 приведены эти же профили для значений $M = 2, 7, 12, 17$, вычисленные по формуле (5). В размерных величинах для $M = 17$ и $l = 50$ м параметры волны следующие: высота $\sim 0,8$ м; ширина на уровне $y = 0 \sim 500$ м; скорость ~ 9 м/с; глубина нижнего полюса ~ 70 м. Критерии слабой нелинейности (2) выполняются с большим запасом.

4. Численно получено большое количество различных многополюсных решений нелинейной алгебраической системы (11) с одним, двумя и более максимумами как для укороченного, так и для полного модельного уравнения квадратичной теории (9). По отношению к двухслойной среде воздух–вода в силу малости отношения их плотностей в атмосфере практически мгновенно отслеживаются более медленные движения в океане. Поэтому существование стационарных уединенных волн в нашей модели безынерционной атмосферы можно рассматривать как продукт взаимодействия потенциальных течений в системе атмосфера–океан. Исключительное многообразие таких течений позволяет предположить, что именно они могут являться основными энергетическими источниками и причиной образования штормов и других аномальных состояний поверхности океана.

5. При обобщении уравнения (9) на случай слоя жидкости конечной глубины h ограничимся рассмотрением чисто потенциальных течений [9]. Восстановление потенциала в полосе по известной функции $\varphi(x,t)$ на $y=0$ и условию на дне $\phi_t|_{y=-h}$ однозначно осуществляется посредством интегрального представления:

$$\phi(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,t)g(\xi-x,y)d\xi, \tag{14}$$

$$g(x,y)=\frac{1}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\cos h\frac{\pi x}{2h}\left(\cos\frac{\pi y}{h}-\cos h\frac{\pi x}{h}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Вычисляя с помощью (14) требуемые производные на $y=0$ в (3), получаем в квадратичном приближении для $\varphi(x,t)$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в явном виде:

$$\varphi_{tt}-L(\varphi_x)+\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_x^2+(L(\varphi_x))^2)+\varphi_t(\varphi_{xx}-L(\varphi_{ttx}))=0, \tag{16}$$

где

$$L(\varphi(x,t))=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi,t)d\xi}{\sin h[\alpha(\xi-x)]}, \qquad \alpha=\frac{\pi}{2h}. \tag{17}$$

Интеграл в (17) понимается в смысле главного значения. Результирующее уравнение (16) справедливо при любых h, дисперсионные эффекты в нем учтены точно. В частности, с учетом соотношения $L(e^{ikx})=i\tanh(kh)e^{ikx}$ линеаризованное уравнение (16) дает известный закон дисперсии поверхностных гравитационных волн: $\omega^2=k\tanh(kh)$. В предельных случаях:

а) мелкой воды ($h\to0$). Ядро L-оператора (17) имеет острый максимум при $\xi=x$. Разложение функции $\varphi(\xi,t)$ в степенной ряд в окрестности этой точки, после интегрирования дает $L(\varphi)\sim h\varphi_x+(h^3/3)\varphi_{xxx}+\ldots$ Оставляя из нелинейных слагаемых в (3) только первое и заменяя его на приближенное $(\varphi_x^2)_t\approx\mp(\varphi_x^2)_x$, где "$\mp$" соответствует прямой и обратной волне, получаем известное уравнение Буссинеска:

$$\varphi_{tt}-h\varphi_{xx}-\frac{h^3}{3}\varphi_{xxxx}\mp3(\varphi_x^2)_x=0; \tag{18}$$

б) глубокой воды ($h\to\infty$). Согласно (17), в этом случае $L(\varphi)$ переходит в преобразование Гильберта:

$$\lim_{h\to\infty}L(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi,t)d\xi}{\xi-x}\equiv H(\varphi). \tag{19}$$

Вводя предельные функции $W^{\pm}(x,t)=\varphi\pm iH(\varphi)$, уравнение (16) преобразуется к виду (9), если полюсные особенности отсутствуют ($W_P=0$).

1. Дж.Уизем, Линейные и нелинейные волны, пер. с англ. М.: Мир (1977) (G.B.Whitham F.R.S., Linear and nonlinear waves, A Wiley-interscience publication, New York, 1974).
2. В.Е.Захаров, ПМТФ №2, 86 (1968).
3. Г.Юэн. Б.Лейк, Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. пер. с англ. М.: Мир (1987) (H.C.Yuen and B.M.Lake, Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves, Acad. Press, New York, 1982).
4. А.С.Монин, В.П.Красицкий, Явления на поверхности океана, Л.: Гидрометеоиздат (1985).
5. Л.В.Овсянников, Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн, Новосибирск: Наука (1985).
6. М.В.Келдыш, Избранные труды, кн.2, Механика, М.: Наука (1985).
7. Н.И.Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. М.: ГИФМЛ (1962).
8. Л.Н.Сретенский, Теория волновых движений жидкости. М.: Наука (1977).
9. В.П.Лукомский, Ю.В.Седлецкий, Препринт ин-та физики АН Украины, №11, (1993).
10. Y.Matsuno, Phys. Rev. Lett. 69, 609 (1992).