Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.9, стр.620 - 624 ©1994 г. 10 мая

О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ХАОС – РЕГУЛЯРНОСТЬ

Ю.Л.Болотин, В.Ю.Гончар, М.Я.Грановский*[□]

Харьковский физико-технический институт АН Украины
310108 Харьков, Украина

**Научно-технический Центр Электрофизической обработки АН Украины*
310108 Харьков, Украина

[□] ГНПО "Метрология"
310078 Харьков, Украина

Поступила в редакцию 27 января 1994 г.
После переработки 6 апреля 1994 г.

Предсказана возможность существования аномального перехода хаос–регулярность в простых гамильтоновых системах. Существование такого перехода продемонстрировано на примере ангармонического осциллятора под воздействием монохроматического внешнего поля.

Задача о поведении простейших нелинейных систем в монохроматическом внешнем поле представляет интерес с точки зрения сравнения результатов эксперимента [1] с предсказаниями теории [2].

Периодическое во времени внешнее поле индуцирует в фазовом пространстве нелинейной консервативной гамильтоновой системы плотный набор резонансов, положение которых I_k определяется условием резонанса между собственными частотами $\omega(I)$ (I – переменная действия невозмущенного гамильтониана) и частотой внешнего возмущения Ω. Для достаточно слабого внешнего поля первичные резонансы остаются изолированными. По мере роста амплитуды F внешнего поля происходит увеличение ширин резонансных зон W_k, приводящее при $K > F_{cr}$ к их перекрытию. Когда это происходит, то есть при выполнении условия

$$\overline{W}_k = \Delta I_k, \tag{1}$$

где $\overline{W}_k = \frac{1}{2}(W_k + W_{k+1})$, $\Delta I_k = |I_k - I_{k+1}|$, говорят о переходе к глобальной стохастичности в соответствующей области фазового пространства. Критерий перекрытия резонансов Чирикова [3] (1) обеспечивает надежную оценку критического значения возмущения F_{cr}, необходимого для перехода к глобальной стохастичности.

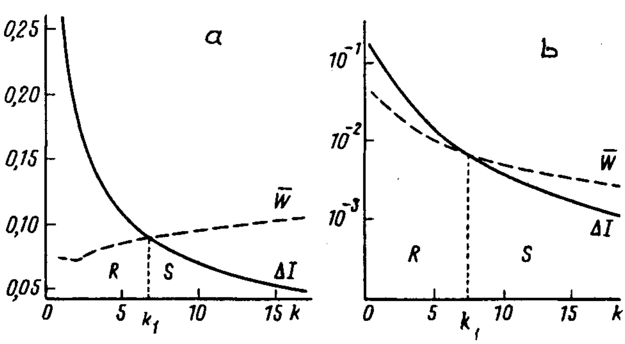

Рис.1. Зависимость ширин $\overline{W}_k$ и расстояний между резонансами ΔI_k от их номера: a – для одномерного Кулона, b – для прямоугольной ямы. Область значений k слева от k_1 регулярная (R), справа – стохастическая (S), так как ширина превышает расстояние между резонансами

Простейшее относительное поведение ширин $\overline{W}_k$ и расстояний между резонансами ΔI_k соответствует случаю, когда выполнение условия перекрытия резонансов (1) для некоторого номера k_1 (при фиксированном уровне внешнего возмущения) гарантирует его выполнение и для любого $k > k_1$. Именно такая ситуация имеет место для хорошо изученных систем: одномерного Кулона [4] и прямоугольной ямы [5], подверженных монохроматическому возмущению. В первом случае $\overline{W}_k \approx k^{1/6}$, $\Delta I_k \approx k^{-2/3}$, а во втором $\overline{W}_k \approx k^{-1}$, $\Delta I_k \approx [k(k+1)]^{-1}$. Как видно из рис.1 и для одномерного Кулона и для прямоугольной ямы имеет место переход регулярность – хаос (будем в дальнейшем называть его нормальным), так как существует единственная точка k_1, такая, что для $k > k_1$ всегда $\overline{W}_k > \Delta I_k$ и, следовательно, движение будет хаотическим. Однако при усложнении зависимости ширин резонансов и расстояний между ними от номера резонанса, можно допустить возникновение дополнительной точки пересечения и, как следствие, нового перехода хаос – регулярность, который будем называть аномальным. Как экзотический случай можно допустить даже возможность возникновения перемежаемости регулярных и хаотических областей фазового пространства.

В настоящей статье мы продемонстрируем существование аномального перехода хаос – регулярность для простой гамильтоновой системы – ангармонического осциллятора под воздействием монохроматического возмущения. Динамика системы генерируется гамильтонианом

$$H(p, x, t) = H_0(p, x) + Fx\cos\Omega t, \tag{2}$$

где невозмущенный гамильтониан

$$H_0(p, x) = \frac{p^2}{2m} + Ax^n = E \quad (n = 2l,\ \ l > 1). \tag{3}$$

Система (3) заполняет нишу между двумя важнейшими физическими моделями – гармоническим осциллятором ($n = 2$) и прямоугольной ямой ($n = \infty$).

Недавно система (2) изучалась в работах [6,7], однако только для амплитуд F, существенно превышающих значения, требуемые для перекрытия соседних резонансов. В работе [7] можно найти и достаточно подробный список литературы, относящийся к рассматриваемому вопросу.

Гамильтониан $H_0(p, x)$ в переменных угол – действие (I, θ) имеет вид

$$H_0(I) = \left[\frac{2\pi}{\alpha G(n)} I\right]^{\alpha}, \tag{4}$$

где

$$G(n) = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma(1 + \frac{1}{n})}{A^{1/n}\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})}, \qquad \alpha = \frac{2n}{n+2}.$$

Резонансные значения действия I_k, определяемые из условия $k\omega(I_k) = \Omega$, равны

$$I_k = \frac{2n}{n+2}\left(\frac{G(n)}{2\pi}\right)^{2n\beta}\left(\frac{\Omega}{k}\right)^{(n+2)\beta}, \qquad \beta = \frac{1}{n-2}. \tag{5}$$

Классическое рассмотрение, базирующееся на критерии перекрытия резонансов, приводит к следующему выражению для критической амплитуды внешнего возмущения:

$$F_k^{cr} = 2^{-(3n-4)\beta}\frac{n(n-2)}{(n+2)^2}\frac{1}{x_k}\left[\frac{G(n)}{\pi}\right]^{2(n-1)\beta}\Omega^{2(n-1)\beta}k^{6\beta}\left[k^{(2+n)\beta}-(k+1)^{(2+n)\beta}\right]^2, \qquad (6)$$

где x_k – компонента Фурье координаты $x(I,\theta)$. Соотношение (6) решает проблему восстановления структуры фазового пространства рассматриваемого гамильтониана при произвольных значениях параметров. Перечислим кратко основные особенности этой структуры.

1. Для прямоугольной ямы ($n = \infty$) при любом значении F можно указать энергию (или номер резонанса), выше и ниже которой движение будет регулярным или хаотическим, соответственно.

2. Для любого $n < \infty$ всегда можно указать значение внешнего возмущения $F_0(n)$, такое, что для $F < F_0(n)$ движение будет оставаться регулярным при всех энергиях.

3. Для любого $F > F_0(n)$ можно указать энергетический интервал, внутри которого движение будет хаотическим, а вне – регулярным.

4. Для данного значения n размер хаотического интервала зависит только от амплитуды внешнего поля и не зависит от частоты.

Обнаруженный эффект можно наблюдать для часто обсуждаемого в литературе случая с $n = 4$. При значениях параметров гамильтониана $A = m = \Omega = 1$ аномальный переход хаос–регулярность, например для резонанса $k = 5$, имеет место при амплитуде внешнего поля $F_{cr} \sim 0,029$. В этом случае $F_0(4) = 0,011$. Критические амплитуды для реальных систем, то есть при произвольных параметрах гамильтониана, могут быть получены простым масштабным преобразованием. При $n \geq 8$ структура фазового пространства достаточно плавно зависит от степени ангармоничности. Поэтому приведем в качестве иллюстрации результаты анализа движения для $n = 8$.

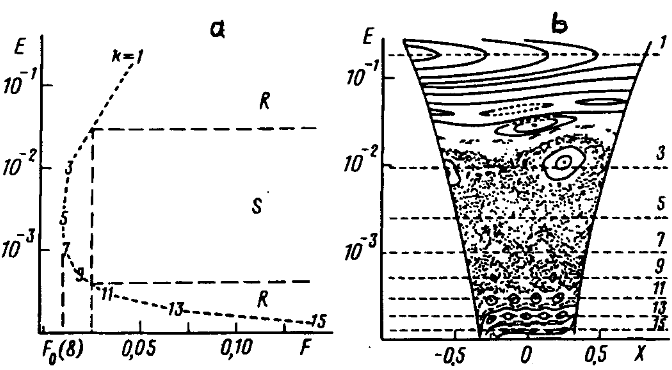

Рис.2. *a* – "Фазовая диаграмма" – критические значения амплитуды внешнего поля для различных номеров резонансов (указаны цифрами 1–15 на кривой). Верхняя часть кривой ($k = 1 - 5$) соответствует нормальному переходу, а нижняя часть ($k = 5 - 15$) – аномальному. *b* – Стробоскопическое представление траекторий гамильтониана (2) на фоне потенциальной ямы x^8 при $F = 0,022$ ($A = 1$, $m = 1$)

На рис.2 показана "фазовая диаграмма", позволяющая при фиксированном уровне внешнего возмущения определить энергетические интервалы регуляр-

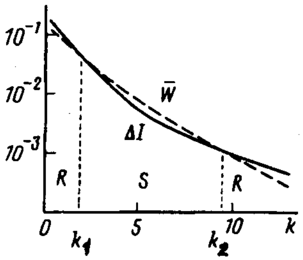

Рис.3. То же, что и на рис.1, но для потенциала x^8. Аномальный переход вблизи 10-го резонанса

ного и хаотического движений. Представленная на рис.2 (справа) стробоскопическая зависимость $E(x)$ подтверждает существование аномального перехода хаос-регулярность. На рисунке хорошо видны сохранившиеся при больших значениях k изолированные нелинейные резонансы, в окрестности которых движение остается регулярным. Причину этой аномалии поясняет рис.3. Приведенные на нем зависимости ширин резонансов и расстояний между ними демонстрируют наличие не одной, а двух точек пересечения при $k = k_1$ и k_2 и, следовательно, аномального перехода хаос-регулярность.

Одно из наиболее важных следствий перехода к глобальной стохастичности - диффузионная передача энергии. Для систем, в которых возможен аномальный переход хаос-регулярность, любой хаотический интервал будет ограничен как сверху, так и снизу регулярными интервалами, что приведет к ограничению диффузионного роста (или диффузионных потерь) энергии частицы. Таким образом, аномальный переход приводит к стабилизации частицы на определенном энергетическом интервале. В частности, стохастическая диффузия имеет место для ридберговских состояний электрона в водородоподобном атоме [1,2]. Для квазиклассических состояний, хорошо описываемых одномерным кулоновским потенциалом, электрон имеет тенденцию диффундировать в область высоких энергий, вплоть до ионизации. Однако отклонение потенциала от кулоновского, например за счет эффектов экранировки, может привести к возникновению при высоких энергиях аномального перехода хаос-регулярность и локализации электрона на конечном энергетическом интервале.

Численные эксперименты показали [8], что система (2) может быть использована для описания ротационных возбуждений диатомных молекул, например CsJ, под действием сильного электромагнитного поля. В этих экспериментах аномальный переход регулярность-хаос-регулярность может быть обнаружен как в изменении статистических свойств спектров квазиэнергий, так и в структуре квазиэнергетических волновых функций.

Обнаруженная специфика фазового пространства может проявиться в экспериментах по инфракрасному поглощению в так называемых квантовых точках [9], представляющих двумерный электронный газ, удерживаемый в плоскости гетероконтакта полупроводника ангармоническим потенциалом [10].

Наконец, в качестве подходящего объекта для наблюдения рассматриваемого эффекта можно указать атомные ловушки Пауля [11], хорошо описываемые одномерной моделью заряженной частицы в ангармоническом статическом потенциале под действием монохроматического дипольного возмущения.

В заключение отметим близкое сходство в структуре фазового пространства рассмотренной одномерной системы с периодическим возмущением и двумерной консервативной гамильтоновой системы с компактной областью локальной неустойчивости. В обеих системах имеет место аномальный переход регулярность–хаос–регулярность; в первом случае, как показано в настоящей работе, по амплитуде внешнего поля, а во втором случае [12] – по параметру нелинейности соответствующего двумерного потенциала.

Работа выполнена при поддержке Американского Физического Общества, Фонда Сороса и Государственного Комитета по науке и технологиям Украины.

---

1. K.A.H. van Leeuven et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 2231 (1985).
2. G.Casati et al., Phys. Rep. **154**, 77 (1987).
3. B.V.Chirikov, Atomnaya energya **6**, 630 (1959).
4. R.V.Jensen, Phys. Rev. **30**, 386 (1984).
5. W.A.Lin and L.E.Reichl, Physica **D19**, 145 (1986).
6. H.Breuer, K.Dietz ,and M.Holthaus, Physica **D46**, 317 (1991).
7. H.Breuer and M.Holthaus, Ann. Phys. **211**, 249 (1991).
8. N.Ben-Tal, N.Moiseev, and H.Korsch, Phys. Rev. **A46**, 1669 (1992).
9. D.Heitmann and J.P.Kotthaus, Physics Today **46**, 56 (1993).
10. Y.H.Zeng and R.A.Serota (in press).
11. W.Paul, Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).
12. Yu.L.Bolotin et al., Physics of elementary particles and atomic nuclei, **20**, 878 (1989); Phys. Lett. **135**, 29 (1989); **144**, 459 (1990).