

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС И САМООРГАНИЗАЦИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Г.Н.Бурлак

Киевский университет им. Тараса Шевченко
252127 Киев, Украина

Поступила в редакцию 28 марта 1994 г.

Исследовано параметрическое акустоэлектромагнитное взаимодействие при наличии малого шумового сигнала. Установлено, что в надкритических условиях в системе происходит самоорганизация, состоящая в формировании пространственно-временной структуры: периодически "обегающей" кристалл связанной пары звуковых солитонов большой амплитуды.

В последние годы эффекты, связанные с явлением стохастического резонанса и самоорганизации, привлекают значительное внимание при изучении систем с шумом (см. [1] и цитированную там литературу, а также недавний обзор [2]). Главный интерес представляет выявление активной роли шума при возбуждении когерентного движения. Типичная ситуация состоит в исследовании отклика нелинейной мультстабильной системы на внешнюю периодическую силу в присутствии шума. Однако большой интерес представляют нелинейные системы, где в отсутствие внешней силы периодическое движение возбуждается как результат развития неустойчивости, приводящей к переходу в новое неоднородное состояние [3].

Рассмотрим анизотропный кристалл, обладающий нелинейной (квадратичной) электрострикцией, в котором распространяются взаимодействующие две параллельные электромагнитные волны и акустическая волна. Для частот и волновых векторов считаются выполненными условия связи $\omega_1 - \omega_2 = 2\Omega$, $k_1 - k_2 = 2K$. Для надкритических возмущений в безграничной среде такое взаимодействие приводит к формированию солитонного импульса акустической волны, скорость перемещения которого имеет порядок скорости звука и определяется балансом параметрического усиления и истощения накачки, уменьшающего это усиление [4].

В случае ограниченного кристалла длины l следует учесть отражение звука от границ, что приводит к многократному прохождению импульсом области взаимодействия и накоплению нелинейных эффектов. При этом в рассматриваемом ниже наиболее простом случае вследствие условий связи только прямая акустическая волна будет активно взаимодействовать с электромагнитной волной накачки.

Безразмерные уравнения для амплитуд волн $\partial A_{1,2}/\partial z = \mp A_{2,1}A_3^2$, $(\partial/\partial\tau + \partial/\partial z + \Gamma)A_3 = A_1A_2A_3$ допускают упрощение при помощи подстановки $A_1 = \cos\phi$, $A_2 = \sin\phi$, $A_3^2 = \partial\phi/\partial z$ и после исключения отраженной волны приводят к следующему замкнутому уравнению для ϕ :

$$(\partial/\partial\tau + \partial/\partial z + 2\Gamma)\phi = \sin^2\phi + [f_3(\tau) + R^2(\partial\phi(L, \tau - L)/\partial z)^{1/2}]^2, \quad (1)$$

где $R^2 = R_0R_L \exp(-\Gamma L)$; R_0 , R_L - коэффициенты отражения при $z = 0, L$. Начальные и граничные условия имеют вид $A_1(0, \tau) = 1$, $A_2(0, \tau) = 0$, $A_3(0, \tau) = f_3(\tau) + R^2A_3(L, \tau - L)$, $A_3(z, 0) = 0$, $A_3(L, \tau) = 0$ при $\tau < 0$, $L = l/|n_l|$, l_{nl} - пространственный масштаб нелинейного взаимодействия, Γ - параметр

затухания. Исходя из (1), уравнение для полной энергии прямой акустической волны

$$W(\tau) = \int_0^L A_3^2(z, \tau) dz$$

можно записать так:

$$dW/d\tau = -2\Gamma W + \sin^2 W + [f_3(\tau) + R^2(\partial\phi(L, \tau - L)/\partial z)^{1/2}]^2 - \partial\phi(L, \tau - L)/\partial z. \quad (2)$$

Для безграничной среды $L \rightarrow \infty$ и $|f_3| \ll 1$ динамика формирующегося солитона определяется спектром стационарных значений энергии $W = W(\Gamma)_i$, где W_i удовлетворяют уравнению $2\Gamma W = \sin^2 W$, имеющему в зависимости от параметра Γ (управляющий параметр) одно или несколько (нечетное число) корней. Первое ненулевое решение появляется при значении $\Gamma = \Gamma_c \approx 0,36$, которое является точкой первой бифуркации (1) [4]. Если обозначить состояние с $W = 0 = W_0$, то четные и нечетные корни отвечают устойчивым и неустойчивым стационарным значениям энергии соответственно (W_1 – первое неустойчивое значение). При этом неустойчивость наступает при выполнении двух условий: $\Gamma < \Gamma_c$ и $W_1 < W$.

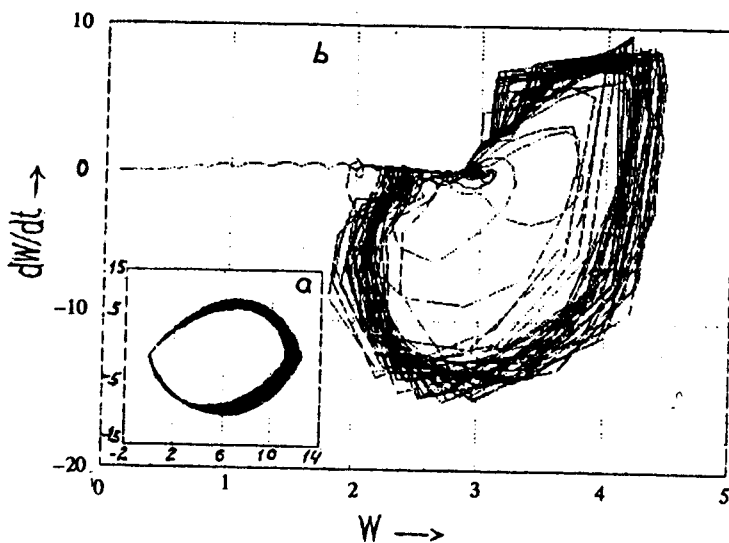


Рис.1. Фазовая плоскость ($dW/dt, W$): а – линейный режим, б – нелинейный режим

При учете ограниченности среды L и наличии отражения картина резко усложняется. Сформировавшийся солитон не покидает области взаимодействия, а, отразившись в обратную волну, с задержкой попадает на вход. Из-за наличия поглощения $\Gamma \neq 0$ и неидеальности отражения $R_{0,L} < 1$ происходит сброс энергии, в результате чего динамика приобретает сложный характер: переотраженный импульс не воспроизводит ни свою установившуюся форму, ни стационарную энергию. Ввиду большой сложности задачи в работе был

выполнен компьютерный эксперимент путем численного решения (1) при различных параметрах. Расчет проводился по схеме второго порядка, точность контролировалась путем уменьшения шага сетки. На рисунках результаты приведены для следующих параметров: $L = 5$, $\Gamma = 0,015$, $R_0 R_L = 0,9$, шаг временной сетки $\Delta\tau = 0,023$, амплитуда входного сигнала $f_{30} = 0,05$.

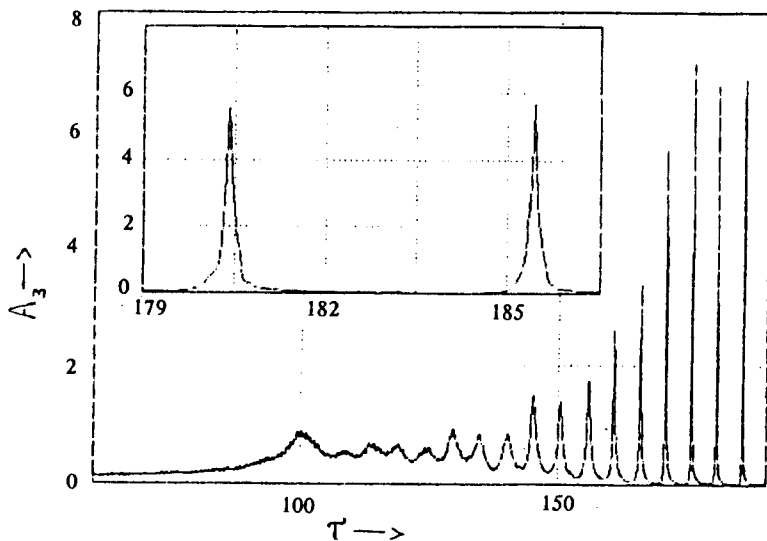


Рис.2. Зависимость амплитуды звука на выходе $A_3(L, \tau)$ от времени

Интегрально временной ход процесса удобно исследовать на фазовой плоскости ($dW/d\tau, W$) с учетом (2) и (1). На рис.1а показана фазовая плоскость в отсутствие накачки, $R = 1$, $\Gamma = 0$ и импульсном входном сигнале $f_3(\tau) = \exp(-(\tau - 2)^2)$. Как видно, траектория имеет обычный вид замкнутой кривой, что отвечает переотражаемому с периодом $T = 2L$ линейному звуковому импульсу. При наличии затухания траектория сжимается к началу координат, что отвечает релаксации возбуждений в кристалле.

Совсем другой характер динамики при наличии шумового сигнала (в расчетах шум $f_3(\tau)$ моделировался равномерно распределенной на интервале $[0, f_{30}]$ случайной величиной). Как показывает расчет, при докритических условиях на выходе кристалла наблюдаются только шумы. При этом фурье-спектры входного и выходного сигналов практически одинаковы. Однако уже при слабой надкритичности выходной сигнал начинает быстро нарастать и в кристалле формируется мощный звуковой солитоноподобный импульс (рис.2). За время порядка нескольких проходов импульс резко усиливается и сжимается, однако так, что его энергия W стремится к W_2 . Фурье-спектр выходного сигнала состоит из целого ряда острых пиков, а функция автокорреляции ясно указывает на наличие когерентного движения в системе (рис.3). Примечательно, что при этом период движения равен половине времени обхода всего кристалла: $T = L$. За время наблюдения сигнал на выходе эволюционирует от шумов малой амплитуды и с момента генерации приобретает характерный вид периодической последовательности гигантских солитоноподобных импульсов. Ширина импульсов быстро становится значительно меньше длины кристалла (рис.2).

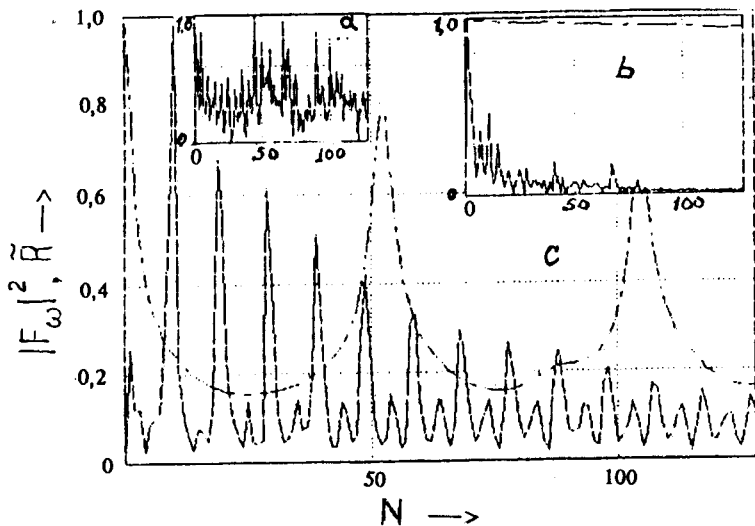


Рис.3. Фурье-спектр $|F_\omega|^2$ (сплошная линия) и автокорреляционная функция \hat{R} (штрих-пунктирная линия) амплитуды звука на выходе $A_3(L, \tau)$ в функции от номера точки N временной выборки: *a* – линейный режим, *b* – слабо нелинейный режим (начальная выборка), *c* – развитый нелинейный режим

Формирование такого состояния, по-видимому, происходит по следующему сценарию. Вследствие незатухающего источника шума на входе и переотражения от границ происходит постепенное накопление энергии в системе. При $W > W_1$ в системе возникает неустойчивость, в результате развития которой формируется солитон. Однако, после отражения солитона в обратную волну пороговые условия, приведшие к его рождению, вновь начинают выполняться. В результате в кристалле зарождается второй солитон. Поскольку момент начала генерации формирующегося импульса не определен, а скорость перемещения его вершины меньше скорости звука, после прихода первого импульса оба солитона начинают сильно взаимодействовать. Характер взаимодействия зависит от положения суммарной энергии W в стационарном спектре, что на первом этапе приводит к весьма сложной динамике, когда фазовые траектории перепутываются в окрестности точек $W_{2,3}$. Однако, вследствие сброса энергии после довольно длительного переходного процесса в системе вырисовывается новый предельный цикл (рис.1б). Это говорит об установлении периодичности в движении связанной солитонной пары, "обегающей" кристалл. Поскольку каждый импульс нестационарен, такая повторяемость становится возможной, если импульсы не перекрываются, а расстояние между центрами равно длине кристалла. Заметим, что средняя энергия пары W (которую можно трактовать как энергию когерентного движения) слабо меняется при увеличении амплитуды шума f_{30} в пределах $0,05 \div 0,5$. Если трактовать отношение W/f_{30}^2 как соотношение сигнал/шум, то в данной среде имеет место стохастический резонанс без внешней периодической силы. Это позволяет расширить понятие стохастического резонанса не только на автономные системы с предельным циклом [1], но и на неустойчивые среды. В таких средах когерентное со-

стояние может развиваться как отклик на шумовое воздействие и отвечает самоорганизации, проявляющейся в формировании когерентной неоднородной и нестационарной структуры.

При более высоких надкритичностях (дальнейшее уменьшение Γ) начинают сказываться более высокие стационарные точки W_i , вследствие чего пространственно-временные масштабы структуры уменьшаются, а характер движения, как показывает расчет, все более усложняется. При значительной надкритичности импульсы начинают дробиться, из-за большого числа стационарных точек фазовая кривая сильно перепутывается, а сам процесс приобретает хаотические черты.

Представленные результаты не только обнаруживают явление самоорганизации в сравнительно простой нелинейной модели, но и с точки зрения эксперимента показывают возможность генерации серии сверхкоротких импульсов звука в анизотропном кристалле.

-
1. Hu Gang, T.Ditsinger, C.Z.Ning, and H.Haken, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 807 (1993).
 2. M.C.Cross and P.C.Hogenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, (part 2), 851 (1993).
 3. Г.Хакен, Синергетика. – М.: Мир, 1985. (H.Haken. *Advenced Synergetics*. Springer-Verlog, 1983).
 4. Г.Н.Бурлак, *ЖЭТФ* **97**, 1607 (1990).