

УИЗЕМОВСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ, ЧАСТИЧНО НАСЫЩАЮЩИЕ МОДУЛЯЦИОННУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

P.Ф.Бикбаев, В.Р.Кудашев

*Институт математики с ВЦ, Уфимский научный центр РАН
450000 Уфа, Россия*

Поступила в редакцию 28 февраля 1994 г.

После переработки 4 мая 1994 г.

В рамках подхода Гуревича и Питаевского [6] построено модулированное по Уизему [1] решение нелинейного уравнения Шредингера (уравнения НШ), соответствующее режиму частично насыщенной модуляционной неустойчивости. Предлагаемое решение описывает механизм эволюции монохроматической волны в уравнении НШ, приводящий к рождению новой фазы и возникновению расширяющейся осцилляционной области.

1. С точки зрения теории уиземовских деформаций [1], модуляционная неустойчивость (см., например, [2–5]) в нелинейном уравнении Шредингера (НШ)

$$iu_t + U_{xx} + 2|u|^2u = 0 \quad (1)$$

связана с тем, что характеристические скорости уравнений Уизема–НШ комплексны, так что возмущения, линеаризованные на постоянном (локально) фоне, оказываются экспоненциально растущими по времени. Можно предположить, однако, что существуют не равные константе решения уравнений Уизема–НШ, зануляющие комплексную часть некоторых характеристических скоростей и тем самым частично насыщающие модуляционную неустойчивость.

Цели настоящей работы – продемонстрировать существование и непротиворечивость приближенного решения уравнения НШ (1), сконструированного с помощью уиземовских деформаций, частично насыщающих модуляционную неустойчивость, и описать на основе этого решения механизм эволюции нульфазного решения (монохроматической волны) уравнения НШ:

$$u_0(x, t) = e^{i2t}, \quad (2)$$

приводящий к рождению и эволюции новой фазы в силу уравнений Уизема–НШ. Важно, что характерное время развития новой фазы оказывается того же порядка, что и характерное время развития обычной модуляционной неустойчивости.

Эволюция новой фазы приводит к появлению в решении уравнения (1) осцилляционной области, и поскольку в нашем случае один из инкрементов модуляционной неустойчивости обращается в нуль, то возникает аналогия с известным [6] механизмом рождения новых фаз в модуляционно устойчивых ситуациях. Подчеркнем, что физически принципиальное отличие нашей ситуации от [6] (см. также [7]) в том, что предлагаемый ниже механизм рождения новой фазы работает и в том случае, когда асимптотики $u(x \rightarrow \pm\infty, t)$ решения $u(x, t)$ совпадают.

2. Предлагаемое нами приближенное решение уравнения НШ состоит из внешнего нуль-фазного решения (2) в области $x \leq x^-(t)$ и $x \geq x^+(t)$ и из

внутреннего, модулированного по Уизему, однофазного решения из (3)–(13) (см. ниже) в области $x^-(t) \leq x \leq x^+(t)$.

Хорошо известно, что однофазные решения (1) можно представить в виде

$$u^\pm = \sqrt{f(\theta^\pm)} \exp(i\varphi^\pm), \quad \theta^\pm = x - U^\pm t, \quad (3)$$

$$f(\theta) = f_3 + (f_1 - f_3)dn^2\{\sqrt{f_1 - f_3}\theta; m\}, \quad m = (f_1 - f_2)/(f_1 - f_3), \quad (4)$$

$$\varphi_x^\pm = U^\pm/2 \mp A/f; \quad \varphi_t^\pm = -(U^\pm)^2/4 + \left(\sum_i f_i\right) \pm U^\pm A/f, \quad (5)$$

где $f_1 \geq f \geq f_2 \geq 0 \geq f_3$, $A = \sqrt{-f_1 f_2 f_3} \geq 0$, dn – эллиптическая функция Якоби. Разным знакам в (3)–(5) отвечают следующие корни ($\lambda_2 = \lambda_1^*$, $\lambda_4 = \lambda_3^*$) соответствующей эллиптической кривой (определенной выражением $R^2(\lambda) = \prod_1^4 (\lambda - \lambda_i)$) (ср. с [8]):

при верхнем знаке

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &\equiv \alpha^+ - i\gamma^+ = U^+/4 - \sqrt{-f_3}/2 - i(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2})/2, \\ (6) \end{aligned}$$

$$\lambda_3^+ \equiv \beta^+ - i\delta^+ = U^+/4 + \sqrt{-f_3}/2 - i(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})/2,$$

при нижнем знаке

$$\begin{aligned} \lambda_1^- &\equiv \beta^- - i\delta^- = U^-/4 - \sqrt{-f_3}/2 - i(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})/2, \\ (7) \end{aligned}$$

$$\lambda_3^- \equiv \alpha^- - i\gamma^- = U^-/4 + \sqrt{-f_3}/2 - i(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2})/2.$$

Уравнения Уизема–НШ для (1), (3)–(7) имеют вид (ср. с [8])

$$d\lambda_i/dt + S_i(\lambda)d\lambda_i/dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= U + 2\lambda_{12}/(1 - \mu\lambda_{32}/\lambda_{31}), \quad S_3 = U + 2\lambda_{34}/(1 - \mu\lambda_{14}/\lambda_{13}), \\ (9) \end{aligned}$$

$$S_2 = S_1^*, \quad S_4 = S_3^*; \quad \mu \equiv E(m)/K(m),$$

где $\lambda_{ij} \equiv \lambda_i - \lambda_j$, E , K – полные эллиптические интегралы второго и первого рода, $m = \lambda_{21}\lambda_{43}/\lambda_{32}\lambda_{14}$.

В осцилляционной области, при $0 \leq x \leq x^+(t)$, интересующее нас решение уравнений (8) описывается формулами

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &\equiv \alpha^+ - i\gamma^+ \equiv \text{const}; \quad \text{Im}(S_3) = 0, \\ (10) \end{aligned}$$

$$\{4\beta^+ + 2[(\gamma^+)^2 - (\delta^+)^2]/(\beta^+ - \alpha^+)\}t - x = g(\beta^+, \delta^+),$$

где $g(\beta, \delta)$ – произвольная гладкая функция аргументов, определяемая начальными условиями. Рассмотрим простейший случай $g(\beta, \delta) \equiv 0$ (ср. с [6, 7, 9]). Из начального условия (2) получаем $\gamma^+ \equiv 1$, $\alpha^+ \equiv 0$, при этом система

(10) инвариантна относительно преобразований $\delta^+ \rightarrow -\delta^+$ и $(\beta^+, x) \rightarrow -(\beta^+, x)$. Анализ показывает, что система (10) совместна и имеет единственное решение с $\delta^+ \geq 0$, $\beta^+ \geq 0$ в области $0 \leq x \leq x^+(t)$. Вблизи границы $x^+ = x^+(t)$ решение системы (10) имеет вид

$$x^+ = 4\sqrt{2}t, \quad x = x^+ - x', \quad 0 < x' \ll 1,$$

$$\beta^+ \approx 1/\sqrt{2} - 7x'/48t, \quad (\delta^+)^2 \approx x'/2\sqrt{2}t,$$
(11)

так что при $x = x^+(t)$ решение u^+ из (3)–(5) непрерывно сшивается с u_0 из (2), находящимся справа от $x^+(t)$. При $(x/t) \rightarrow +0$ точки $(\lambda_3^+, \lambda_4^+)$ сливаются с $(\lambda_1^+, \lambda_2^+)$, так что рассматриваемое решение (3) вырождается в солитон. Поведение λ_i на комплексной плоскости λ схематично изображено на рис.1. Примерный график амплитуды соответствующего решения (1) при $t \gg 1$ изображен на рис.2

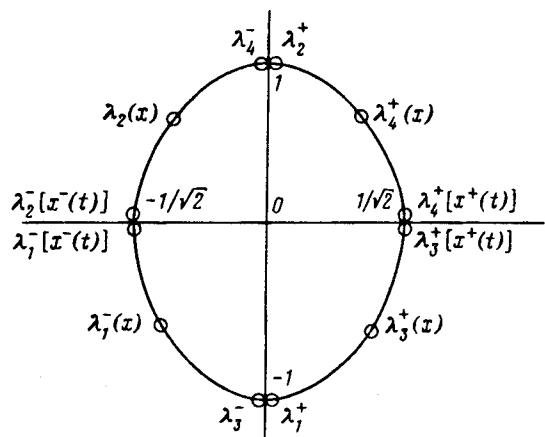


Рис.1. Качественное поведение λ_i^\pm на комплексной плоскости

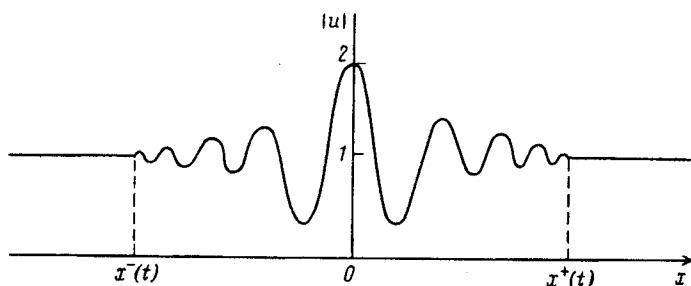


Рис.2. Качественная зависимость $|u|$ от x при больших t

В осцилляционной области $x^-(t) \leq x \leq 0$ решение системы (8) определяется уравнениями

$$\lambda_3^- = \alpha^- - i\gamma^- \equiv \text{const}; \quad \text{Im}(S_1) = 0,$$
(12)

$$\{4\beta^- + 2[(\gamma^-)^2 - (\delta^-)^2]/(\beta^- - \alpha^-)\}t - x = 0.$$

Система (12) аналогична (10). Из начального условия (2) получаем $\gamma^- \equiv 1$, $\alpha^- \equiv 0$. Вблизи границы $x^- = x^-(t)$ решение системы (12) имеет вид

$$x^- = -4\sqrt{2}t, \quad x = x^- + x'', \quad 0 < x'' \ll 1, \quad (13)$$

$$\beta^- \approx -1/\sqrt{2} + 7x''/48t, \quad (\delta^-)^2 \approx x''/2\sqrt{2}t,$$

так что при $x = x^-(t)$ решение u^- из (3)–(5) непрерывно спивается с u_0 из (2), находящимся слева от $x^-(t)$. При $(x/t) \rightarrow -0$ точки $(\lambda_1^-, \lambda_2^-)$ сливаются с $(\lambda_3^-, \lambda_4^-)$, и рассматриваемое решение u^- из (3)–(5) вырождается в солитон. Соответствующие графики приведены на рис.1, 2.

Уравнение (1) инвариантно относительно преобразования Галилея, поэтому вышеописанный анализ без затруднений переносится на случай нуль-фазного решения:

$$u_0(x, t) = \exp[i2\alpha x + i(2 - 4\alpha^2)t].$$

Отметим соответствующие изменения в формулах (10)–(13): $x^\pm \rightarrow 4\alpha t + x^\pm$, $\alpha^\pm \rightarrow \alpha$, $\beta^\pm \rightarrow \alpha + \beta^\pm$, $\lambda_1^+ \rightarrow \alpha + \lambda_1^+$, $\lambda_3^- \rightarrow \alpha + \lambda_3^-$.

3. Однофазные уравнения Уизема–НШ (8) описывают, вообще говоря, две пары возмущений. В связи с этим возникает вопрос о правомерности "отбрасывания" одной из пар возмущений: $\lambda_1^+ \equiv \text{const}$ или $\lambda_3^- \equiv \text{const}$ и исследования вышеописанного механизма "в чистом виде". Ответ состоит в том, что поскольку (см. (11), (13)) $|dx^\pm(t)/dt| \approx 1$, то характерное время развития рассмотренного нами процесса того же порядка, что и характерное время развития модуляционной неустойчивости "отброшенной" моды ($|\text{Im}S_1^+|, |\text{Im}S_3^-| \approx 1$ в начальный момент времени). Отметим также, что значения $(|\text{Im}S_1^+|, |\text{Im}S_3^-|)$ максимальны лишь во внешней области решения и уменьшаются до нуля по мере приближения к центру осцилляционной области. Ясно, конечно, что полная картина эволюции решения (2), одновременно учитывающая динамику всех возмущений, будет более сложной, чем на рис.2. Решение этого вопроса, а также его строгое обоснование при больших t (с учетом применимости подхода Гуревича и Питаевского [6] и метода Уизема [1]) требует более сложной техники, чем использованная выше (ср. с более простой ситуацией в модуляционно устойчивых случаях [7]) и выходит за рамки настоящей работы.

С формальной точки зрения построенное выше решение следует рассматривать как гипотезу о виде главного члена асимптотического решения уравнения НШ (1) с начальными условиями, впервые рассмотренными Карпманом [10]: $u(x, 0) = 1 + \epsilon(x)$, где $\epsilon(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ (то есть задача о эволюции локального возмущения однородного фона). Следует отметить, что численные результаты [11] (см. также [12]) находятся в качественном соответствии с рассмотренным нами решением. С этой точки зрения наша работа является очередным этапом теоретического описания задачи [10].

Во время рецензирования настоящей работы нам стало известно о статье [13], посвященной той же задаче, что изложена выше. Отметим, что решение, построенное в [13], является разрывным (например, на правом фронте $x^+(t)$), что отличает его от (3)–(13).

Работа одного из авторов (В.Р.К.) частично поддержана "BUT-RUTEX" и грантом РФФИ № 93-011-16088. Мы благодарны Г.А.Элю и М.В.Павлову, обратившим наше внимание на работу [13].

-
1. G.B.Whitham, Proc. Roy. Soc. **A283**, 238 (1965); Дж. Уизем, Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
 2. Б.Б.Кадомцев, Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
 3. Е.А.Кузнецов, ДАН СССР **238**, 575 (1977); Н.Н.Ахмедиев, В.М.Елеонский, Н.Е.Кулагин, ЖЭТФ **89**, 1542 (1985).
 4. С.К.Жданов, Б.А.Трубников, Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.
 5. G.Rowlands, J.Phys. A: Math. Gen. **13**, 2395 (1980); P.A.E.Janssen, Phys. Fluids **24**, 23 (1981); E./Infeld, Phys. Rev. Lett. **47**, 717 (1981).
 6. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский, ЖЭТФ **65**, 590 (1973).
 7. Р.Ф.Бикбаев, ТМФ **81**, 3 (1989); P.D.Lax, C.D.Levermore, and S.Venakides, Generation and propagation of oscillation in dispersive IVPs and their limiting behaviour, Important developments in Soliton Theory, 1980-1990, Springer-Verlag, Berlin, 1993 (T.Fokas, V.E.Zakharov eds.).
 8. М.В.Павлов, ТМФ **71**, 351 (1987).
 9. А.М.Камчатнов, Phys. Lett. **162A**, 389 (1992).
 10. В.И.Карпман, Письма в ЖЭТФ **6**, 829 (1967).
 11. В.И.Карпман, Е.М.Крушкаль, ЖЭТФ **55**, 530 (1968); F.D.Tappert, W.J.Cole, H.Hardin, and N.J.Zabusky, Wave kinetic equation by numerical particle-in-cell simulation methods. Preprint PCP-70-29, Comp. Phys. Res. Dep. Bell. Tel. Lab., 1970.
 12. В.И.Карман, Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
 13. G.A.El', A.V.Gurevich, V.V.Khodorovskii, and A.L.Krylov, Phys. Lett. **177A**, 357 (1993).