

ВИХРЕВОЙ ГЕЛИКОИД В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю.А.Гененко

*Донецкий физико-технический институт АН Украины
340114 Донецк, Украина*

Поступила в редакцию 9 марта 1994 г.

После переработки 11 мая 1994 г.

В лондоновском приближении получено точное решение проблемы вхождения геликоидального магнитного вихря в токонесущий сверхпроводящий цилиндр в магнитном поле, параллельном оси цилиндра. Найдена диаграмма резистивного состояния в координатах ток-поле.

Резистивное состояние сверхпроводников II рода обычно связывают с движением в них вихрей Абрикосова. Во внешнем магнитном поле к диссипации энергии приводит вязкое движение решетки вихрей [1]. В отсутствие внешнего поля диссипация начинается благодаря проникновению в образец и последующему коллапсу замкнутых вихрей, индуцированных собственным магнитным полем транспортного тока [2-4]. В этой картине определяющим фактором, контролирующим критический ток, обычно считается пиннинг [1].

В последнее время, однако, в экспериментах на микромостиках ВТСП [5] удалось наблюдать исключительно высокие значения критического тока – до 10^9 A/cm^2 , что заставило авторов работ [4, 5] обратиться к альтернативным возможностям формирования критического тока. В работах [3, 4] была рассмотрена проблема краевого барьера для вхождения вихревого кольца в токонесущий цилиндр произвольного радиуса R . Значение критического тока, определяющего исчезновение краевого барьера, оказалось не зависящим от радиуса и равным лондоновскому значению $j_L = cH_c/4\pi\lambda$, где H_c – термодинамическое критическое поле, а λ – лондоновская глубина проникновения магнитного поля. В [4] было показано, что в массивных образцах с $R \gg \lambda$, однако, имеет место резкая зависимость ширины краевого барьера от тока, что приводит к возникновению еще одного характерного значения тока $j_{c1} \approx j_L/\kappa$, где κ – параметр Гинзбурга – Ландау. Ток j_{c1} порождает поле порядка H_{c1} на поверхности и имеет смысл критического тока дефектного механизма вхождения вихрей на неоднородностях масштаба λ [4]. Поэтому при $R \gg \lambda$ высокий критический ток может определяться пиннингом, контролирующим движение вихрей после их вхождения в образец. В случае же тонких сверхпроводников с $R < \lambda$ последний размер выпадает из пространственных зависимостей всех величин [4] и единственным характерным значением тока остается j_L , который для типичных значений параметров монокристаллов 1-2-3 имеет порядок величины 10^9 A/cm^2 . Поскольку дефектный механизм вхождения, вихрь при $R < \lambda$ оказывается незэффективным, можно считать краевой барьер разумным объяснением высокого критического тока, наблюдаемого на микромостиках [5]. Подобной же специфики токонесущих свойств можно ожидать от тонких сверхпроводников и в магнитном поле.

В настоящей работе проблема преодоления вихрем краевого барьера рассматривается с учетом внешнего магнитного поля, приложенного параллельно оси цилиндра. Следует заметить, что такое поле не влияет на условия вхождения вихревого кольца собственного поля тока, так же как и транспортный

ток не понижает критическое поле вхождения линейного вихря, параллельного оси цилиндра, так как в этих случаях реализуются бессиловые конфигурации ток-поле [1]. Могут существовать, однако, другие вихревые конфигурации, более близкие к картине силовых линий поля, для которых краевой барьер будет ниже и которые приведут к зависящему от поля критическому току $j_{cr}(H)$ либо, альтернативно, к критическому полю $H_{cr}(j)$. Симметрия задачи подсказывает рассмотрение класса геликоидальных решений, обсуждавшихся ранее в литературе качественно [1].

В данной работе в лондоновском приближении получено точное решение проблемы геликоидального вихря в идеальном (то есть не содержащем центров пиннинга и поверхностных дефектов) сверхпроводящем цилиндре, нагруженному транспортным током I во внешнем магнитном поле H_0 . Вихревой геликоид может быть описан внутри цилиндра уравнениями Максвелла и Лондонов со специальной правой частью $\vec{\Phi}$ в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) :

$$\lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} H + H = \Phi_0 \frac{e_t}{e_t e_\varphi} \delta(\rho - r) \delta(z - L\varphi), \quad \operatorname{div} H = 0, \quad (1)$$

где Φ_0 – квант потока, e_t и e_φ – единичный касательный вектор винтовой спирали и азимутальный, соответственно, r – радиус спирали, $2\pi L$ – ее шаг, и уравнениями Максвелла в пустом пространстве снаружи сверхпроводника. Правая часть $\vec{\Phi}$ выбрана таким образом, что в неограниченном сверхпроводнике она дает поток Φ_0 , протекающий вдоль оси z , и удовлетворяет требованию $\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0$ для согласования с уравнениями Максвелла. Граничным условием к уравнениям (1) является требование непрерывности магнитного поля H на границе цилиндра и исчезновение поля на бесконечности. Поскольку снаружи сверхпроводника магнитное поле потенциально, его можно описать одним скалярным потенциалом ψ , так что $H = \nabla \psi$, где ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi = 0 \quad (2)$$

с граничным условием $\psi(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$.

Ввиду симметрии задачи зависимость от переменных z и φ может быть описана одной переменной ζ : $\zeta = z - L\varphi$, причем эта зависимость является периодической с периодом 2π . Представив компоненты поля в виде рядов Фурье $H_\rho(\rho, \zeta) = \sum_k e^{ik\zeta} a_k(\rho)$, $H_\varphi(\rho, \zeta) = \sum_k e^{ik\zeta} b_k(\rho)$, $H_z(\rho, \zeta) = \sum_k e^{ik\zeta} c_k(\rho)$, $\psi(\rho, \zeta) = \sum_k e^{ik\zeta} \psi_k(\rho)$, получим из уравнений (1), (2) систему уравнений для фурье-компонент:

$$\frac{\partial^2 a_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_k}{\partial \rho} - \frac{1+k^2}{\rho^2} a_k - \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2}{L^2} \right) a_k + i \frac{2k}{\rho^2} b_k = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 b_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_k}{\partial \rho} - \frac{1+k^2}{\rho^2} b_k - \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2}{L^2} \right) b_k - i \frac{2k}{\rho^2} a_k = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 L} \delta(\rho - r), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 c_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c_k}{\partial \rho} - \frac{k^2}{\rho^2} c_k - \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2}{L^2} \right) c_k - \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r} \delta(\rho - r), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_k}{\partial \rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \psi_k - \frac{k^2}{L^2} \psi_k = 0, \quad (6)$$

и граничные условия к ним:

$$a_k(R) = \frac{\partial \psi_k}{\partial \rho}(R), \quad b_k(R) = \frac{-ik}{R} \psi_k(R), \quad c_k(R) = \frac{ik}{L} \psi_k(R), \quad \psi_k(\infty) = 0.$$

Каждое из уравнений (5) и (6) отделяется от системы уравнений и может быть решено в модифицированных функциях Бесселя $I_n(x)$ и $K_n(x)$ [6] с учетом граничных условий

$$\psi_k(\rho) = d_k K_k(|k|\rho/L), \quad (7)$$

$$c_k = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} [\vartheta(\rho - r) P_k^k(r, \rho) + \vartheta(r - \rho) P_k^k(\rho, r)] + \frac{ikd_k}{L} \frac{I_k(\kappa_k \rho / R)}{I_k(\kappa_k)} K_k\left(\frac{|k|R}{L}\right), \quad (8)$$

где введены обозначения $\kappa_k^2 = (R/\lambda)^2 + k^2(R/L)^2$, и

$$P_l^k(x, y) = [I_l(\kappa_k)K_l(\kappa_k y/R) - K_l(\kappa_k)I_l(\kappa_k y/R)]I_l(\kappa_k x/R)/I_l(\kappa_k).$$

Для решения уравнений (3) и (4) удобно ввести функции $f_k^\pm = a_k \pm ib_k$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 f_k^\pm}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_k^\pm}{\partial \rho} - \frac{(1 \mp k)^2}{\rho^2} f_k^\pm - \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2}{L^2} \right) f_k^\pm = \mp \frac{i\Phi_0}{2\pi\lambda^2 L} \delta(\rho - r). \quad (9)$$

Решения последнего также находятся в терминах модифицированных функций Бесселя и с учетом граничных условий дают

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \frac{i\Phi_0 r}{4\pi\lambda^2 L} [\vartheta(r - \rho)[P_{k-1}^k(\rho, r) \mp P_{k+1}^k(\rho, r)] + \vartheta(\rho - r)[P_{k-1}^k(r, \rho) \mp P_{k+1}^k(r, \rho)]] - d_k \frac{|k|}{2L} \left[\frac{I_{k-1}(\kappa_k \rho / R)}{I_{k-1}(\kappa_k)} K_{k-1}\left(\frac{|k|R}{L}\right) \pm \frac{I_{k+1}(\kappa_k \rho / R)}{I_{k+1}(\kappa_k)} K_{k+1}\left(\frac{|k|R}{L}\right) \right]. \quad (10)$$

Для нахождения оставшегося неизвестным коэффициента d_k воспользуемся уравнением Максвелла $\operatorname{div} H = 0$, которое в фурье-компонентах принимает вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial \rho} + \frac{a_k}{\rho} - \frac{ikb_k}{\rho} + \frac{ik}{L} c_k = 0, \quad (11)$$

откуда

$$d_k = \frac{i\Phi_0 r}{2\pi\lambda^2 |k|} \frac{[I_{k+1}(\kappa_k r / R) / I_{k+1}(\kappa_k) - I_{k-1}(\kappa_k r / R) / I_{k-1}(\kappa_k)]}{\kappa_k I_k(\kappa_k) \left[\frac{K_{k-1}(|k|R/L)}{I_{k-1}(\kappa_k)} + \frac{K_{k+1}(|k|R/L)}{I_{k+1}(\kappa_k)} \right] + 2|k|(R/L)K_k(|k|R/L)}. \quad (12)$$

Полученные выражения (7), (8), (10), (12) полностью описывают структуру вихря. Свободная энергия его на единицу длины цилиндра вдоль оси z , определяемая обычным образом [1] (исключая постоянную часть, не зависящую от положения вихря), сводится к

$$F = \frac{1}{8\pi} \int dV H \vec{\Phi} = \frac{\Phi_0}{8\pi} \left[H_z(\rho = r, 0) + \frac{r}{L} H_\varphi(\rho = r, 0) \right]. \quad (13)$$

При вычислении (13) следует произвести обрезание обычной в лондоновской теории логарифмической расходимости на масштабе ξ сверхпроводящей длины когерентности.

Для исследования поведения вихря во внешнем магнитном поле с учетом транспортного тока необходимо вычислить энергию Гиббса системы (на единицу длины)

$$G = F - \Delta W_I - \Delta W_H, \quad (14)$$

где ΔW_I – работа совершаемая источником постоянного тока при движении вихря, а ΔW_H – работа источника поля. Последняя ввиду цилиндрической геометрии задачи находится как

$$\Delta W_H = \frac{1}{4\pi} \int H H_0 dV = \frac{H_0 \Phi_H(r)}{4\pi}, \quad (15)$$

где $\Phi_H(r)$ – поток, протекающий через спиральный вихрь радиуса r вдоль оси z . Пользуясь (8), находим

$$\Phi(r) = \Phi_0 [1 - I_0(r/\lambda)/I_0(R/\lambda)]. \quad (16)$$

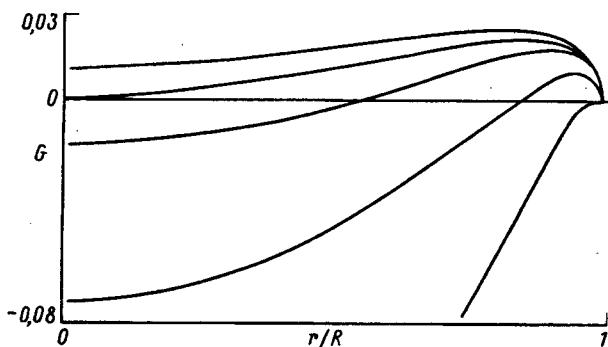
Работа источника тока в расчете на единицу длины цилиндра может быть вычислена в духе работы [7] как $\Delta W_I = I \Phi_I(r)/c$, где $\Phi_I(r)$ – поток, текущий при движении вихря из цепи источника постоянного тока через поверхность образца, на основании того, что для поддержания постоянным транспортного тока I источник тока создает при вхождении магнитного потока в образец э.д.с. обратного знака $E = (d\Phi/dt)/c$. Вычислив, пользуясь (10), магнитный поток

$$\Phi_I(r) = (\Phi_0/2\pi L) [1 - (r/R) I_1(r/\lambda)/I_1(R/\lambda)], \quad (17)$$

находим окончательно для потенциала Гиббса винтового вихря в цилиндре, нагруженном током I , в параллельном поле H_0

$$G = F - \frac{H_0 \Phi_0}{4\pi} \left[1 - \frac{I_0(r/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right] - \frac{I \Phi_0}{2\pi c L} \left[1 - \frac{r I_1(r/\lambda)}{R I_1(R/\lambda)} \right]. \quad (18)$$

Зависимость потенциала Гиббса от радиуса спирали r демонстрирует наличие краевого барьера для вхождения геликоида (см. рисунок). Критические параметры (ток либо поле) для спонтанного вхождения вихря определяются условием выхода максимума $G(r)$ на поверхность цилиндра, то есть $\partial G / \partial r|_{R-\xi} = 0$. В последнем равенстве проведено формальное обрезание типичной для лондонновской теории логарифмической расходимости на масштабе ξ .



Зависимость энергии Гиббса геликоидального вихря в единицах $\Phi_0/4\pi\lambda)^2$ от его радиуса при плотности транспортного тока $j = 0,5j_L$. Радиус цилиндра $R = 0,5\lambda$, высота витка спирали $\pi\lambda$. Различные кривые соответствуют разным величинам внешнего магнитного поля

Вблизи поверхности цилиндра, когда $R - r \ll R, \lambda$, основной вклад в свободную энергию (13)

$$F \cong (\Phi_0/4\pi\lambda)^2 \sqrt{1 + s^2} \ln(2(R - r)/\xi), \quad (19)$$

где через $s = R/L$ обозначен тангенс угла наклона геликоида к оси z . Подстановка (19) в (18) и использование вышеуказанного критерия дают значение критического поля $H_{cr}(j, s)$, зависящего от тока и шага спирали

$$H_{cr}(j, s) = H_c(I_0(R/\lambda)/I_1(R/\lambda))(\sqrt{1+s^2} - s j/j_L), \quad (20)$$

где j – значение плотности транспортного тока на поверхности, а термодинамическое критическое поле $H_c = \Phi_0/2\pi\lambda\xi\sqrt{2}$. Данная зависимость имеет вид кривой с минимумом по s , что позволяет найти оптимальный геликоид, для которого критический ток (поле) вхождения является наименьшим и который, следовательно, первым войдет в образец. Минимизируя (20), находим оптимальный шаг спирали

$$L = R\sqrt{(j_L/j)^2 - 1}. \quad (21)$$

Соответствующие ему значения критического поля H_{cr} и тока j_{cr} вхождения оптимального геликоида удовлетворяют простому соотношению

$$[I_1(R/\lambda)/I_0(R/\lambda)]^2(H_{cr}/H_c)^2 + (j_{cr}/j_L)^2 = 1. \quad (22)$$

Отметим, что если в случае $R \gg \lambda$ направление оптимального вихря совпадает с силовыми линиями полного магнитного поля на поверхности, то при $R < \lambda$ наклон линий поля в $(2\lambda/R)^2$ раз круче, чем вихря.

Найденное соотношение (22) ограничивает область бездиссипативного состояния идеального токонесущего сверхпроводника в продольном магнитном поле в координатах ток–поле. Видно, что в случае тонкого сверхпроводника с $R \ll \lambda$ зависимость критического тока от поля является в $(2\lambda/R)$ раз более слабой, чем в случае толстого.

Учет наличия на поверхности дефектов с размерами порядка λ (что возможно при $R \gg \lambda$), конечно, понизит значения критических параметров вхождения вихрей в толстые образцы и может породить своеобразные зависимости $j_{cr}(H)$ в соответствии с зависимостью ширины краевого барьера от j и H , что явится предметом дальнейших исследований. В случае же тонких образцов, как и при проникновении вихрей собственного поля тока [4], единственным характерным размером ширины барьера является размер образца, поэтому можно ожидать, что наличие дефектов поверхности размера $\delta \ll R$ не окажет существенного влияния на диаграмму резистивного состояния (22).

Автор выражает благодарность профессору Ю.В.Медведеву за постоянный интерес к работе, а также профессорам Дж.Р.Клему, Е.Х.Брандту, Х.К.Фрайхардту, В.М.Пану, Л.М.Фишеру и А.М.Кэмпбеллу за полезное обсуждение результатов. Выполнение работы частично поддержано индивидуальным грантом Международного научного фонда.

1. A.M.Campbell and J.E.Evets, Critical currents in superconductors (Taylor & Francis, London, 1972).
2. В.А.Козлов, А.В.Самохвалов, Письма в ЖЭТФ **53**, 150 (1991); Physica C **213**, 103 (1993).
3. И.Гордион, СФХТ **5**, 1701 (1992).
4. Yu.A.Genenko, Physica C **215**, 343 (1993); Phys. Rev. B**49**, 6950 (1994).
5. H.Jiang, Y.Huang, H.How et al., Phys. Rev. Lett. **66**, 1785 (1991).
6. Handbook of Mathematical Functions, ed. by M.Abramovitz and I.Stegun (Natl. Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964).
7. J.R.Clem, R.P.Huebener, and D.E.Gallus, J.Low Temp. Phys. **13**, 449 (1973).