Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.12, стр.845 - 850 ©1994 г. 25 июня

РЕДУКЦИИ ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АВТОДУАЛЬНОСТИ МОДЕЛИ ЯНГА-МИЛЛСА

М.Легаре[1)], *А.Д.Попов**

Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, T6G 2G1, Canada

**Лаборатория теоретической физики, ОИЯИ (Дубна) п/я 79, 101100 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 1994 г.

Редукции уравнений автодуальности модели Янга–Миллса в $d=4$ по действию непрерывных групп симметрии приводят к системам дифференциальных уравнений в меньшей размерности. Мы описываем алгоритм редукции пары Лакса для уравнений автодуальности относительно произвольной подгруппы группы конформных преобразований пространства R^4. Показано, что условие совместности редуцированной пары Лакса совпадает с редуцированными по действию той же группы симметрии уравнениями автодуальности. Общая схема иллюстрируется тремя примерами.

1. Уравнения автодуальности модели Янга–Миллса (ЯМ) в евклидовом пространстве R^4 с метрикой $\delta_{\mu\nu}$ были введены в знаменитой работе Белавина, Полякова, Шварца и Тюпкина [1]. Пара Лакса для уравнений автодуальности была выписана Белавиным и Захаровым [2]. Поэтому уравнения автодуальности интегрируемы как методом обратной задачи рассеяния (ОЗР) [2], так и методами теории твисторов [3]. Заметим, что интегрируемыми являются и уравнения автодуальности в пространстве $R^{2,2}$ с псевдоевклидовой метрикой $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1,)$ [4]. Редукция этих уравнений к уравнениям модифицированной киральной модели в $R^{2,1}$ и их интегрируемость методом ОЗР были рассмотрены Захаровым и Манаковым [5].

В последнее время было показано, что большое число интегрируемых уравнений в $(1+0), (1+1), (0+2)$ и $(1+2)$ измерениях (уравнения обобщенного волчка Ковалевской, уравнения Пенлеве P_{I}—P_{VI}, Кортевега–де Вриза, Буссинеска, N-волн, Эрнста, Кадомцева–Петвиашвили и другие) могут быть получены редукцией уравнений автодуальности [6–9]. Таким образом, уравнения автодуальности в $d=4$ играют роль универсальной интегрируемой системы, из которой многие другие могут быть получены редукцией по группам симметрии и наложением алгебраических связей на потенциалы ЯМ. Общий метод редукции пары Лакса для уравнений автодуальности в литературе отсутствует, и в большинстве случаев редукция проводилась относительно подгруппы группы трансляций. При этом пары Лакса, соответствующие редуцированным уравнениям, получались тривиальной редукцией пары Лакса для уравнений автодуальности.

В этой заметке мы опишем редукцию пары Лакса уравнений автодуальности относительно произвольной подгруппы группы конформных преобразований пространства R^4, изоморфной группе $SO(5,1)$. Условие совместности редуцированной пары Лакса даст, в свою очередь, редуцированные относительно той

[1)] M.Legaré

же самой подгруппы уравнения автодуальности. Несмотря на то, что в данной работе алгоритм редукции описан только для евклидова пространства R^4, после некоторых изменений он может быть применен к редукции пары Лакса уравнений автодуальности и в $R^{2,2}$.

Отметим, что пара Лакса для уравнения Эрнста, введенная Белинским и Захаровым [10], содержит производную по спектральному параметру. Мы покажем, что производные по спектральному параметру в редуцированной паре Лакса возникают тогда и только тогда, когда группа симметрии содержит один генератор Y из "антиавтодуальной" подгруппы $SO(3)$ группы $SO(4)$ вращений пространства R^4 (явный вид Y будет приведен в п.3).

2. Обозначим через A_μ потенциалы ЯМ в R^4 со значениями в алгебре Ли $gl(n,C)$. Уравнения автодуальности имеют вид [1]

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $\mu,\nu,\ldots = 1,\ldots,4$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ — калибровочные поля модели ЯМ, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, а $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор в R^4 ($\epsilon_{1234} = 1$). Пара Лакса [2] для уравнений (1) может быть записана в виде

$$[D_1 + iD_2 - \lambda(D_3 + iD_4)]\Psi(x,\lambda) = 0,$$
$$[D_3 - iD_4 + \lambda(D_1 - iD_2)]\Psi(x,\lambda) = 0, \tag{2}$$

где $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, а $\Psi \in C^n$ является вектор-функцией, зависящей от координат x_μ пространства R^4 с метрикой $\delta_{\mu\nu}$ и комплексного параметра $\lambda \in CP^1$. Для математически ориентированных читателей заметим, что Ψ является сечением комплексного векторного расслоения $\tilde{E} \simeq Z \times C^n$, заданного над пространством твисторов $Z = R^4 \times CP^1$ для пространства R^4 (см. [3, 11]). Уравнения (2) вместе с уравнением $\partial\Psi/\partial\bar{\lambda} = 0$ означают, что расслоение $\tilde{E}$, являющееся поднятием расслоения $E \simeq R^4 \times C^n$ с автодуальной связностью, голоморфно [3, 11].

Нетрудно проверить, что векторные части $V_1 = \partial_1 + i\partial_2 - \lambda(\partial_3 + i\partial_4)$, $V_2 = \partial_3 - i\partial_4 + \lambda(\partial_1 - i\partial_2)$ дифференциальных операторов в (2) определяют базис антиголоморфных векторных полей относительно следующей комплексной структуры J^μ_ν на R^4 [11]:

$$J^\mu_\nu = -\delta^{\mu\sigma}\bar{\eta}^a_{\sigma\nu}s_a,$$

где $\bar{\eta}^a_{\sigma\nu} = \{\epsilon^a_{bc},\ \sigma = b, \nu = c;\ \delta^a_\nu,\ \sigma = 4;\ -\delta^a_\sigma,\ \nu = 4\}$ — антиавтодуальные тензоры 'т Хофта (см. [12]), $a,b,\ldots = 1,2,3$, s_a параметризуют $S^2 \simeq CP^1$ ($s_a s_a = 1$), и $\lambda = (s_1+is_2)/(1+s_3)$. Мы получим определение автодуального тензора 'т Хофта $\eta^a_{\sigma\nu}$, если изменим знаки перед δ^a_ν и δ^a_σ в определении $\bar{\eta}^a_{\sigma\nu}$. Используя тождества для тензоров 'т Хофта [12], нетрудно показать, что $J^\mu_\sigma J^\sigma_\nu = -\delta^\mu_\nu$, $J^\mu_\sigma V^\sigma_1 = -iV^\mu_1$, $J^\mu_\sigma V^\sigma_2 = -iV^\mu_2$.

3. Как уравнения автодуальности, так и их пара Лакса инвариантны относительно группы конформных преобразований $SO(5,1)$ евклидова пространства R^4. Мы сформулируем общий алгоритм редукции пары Лакса для уравнений автодуальности относительно произвольной подгруппы G группы $SO(5,1)$.

1) Во-первых, зададим гомоморфизм алгебры Ли $so(5,1)$ группы $SO(5,1)$ в алгебру Ли векторных полей X_ξ ($\xi \in so(5,1)$) на R^4 :

$$X^a = \eta^a_{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu,\ \ Y^a = \bar{\eta}^a_{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu,\ \ P_\mu = \partial_\mu,\ \ K_\mu = \frac{1}{2}x_\sigma x_\sigma\partial_\mu - x_\mu D,\ \ D = x_\sigma\partial_\sigma, \tag{3}$$

где $\{X^a\}$ и $\{Y^a\}$ являются генераторами двух коммутирующих $SO(3)$-подгрупп в $SO(4)$, P_μ — генераторы трансляций, K_μ — генераторы специальных конформных преобразований, D — генератор дилатации (растяжения).

2) Во-вторых, мы должны определить действие $SO(5,1)$ на Z, сохраняющее голоморфность расслоения $\tilde{E} \to Z$. Это возможно, если после поднятия $X_\xi \to \tilde{X}_\xi$ генераторов (3) на Z, $\tilde{X}_\xi$ будут инфинитезимальными автоморфизмами комплексной структуры J^μ_ν на R^4 и канонической комплексной структуры ϵ^i_j на $R^2 \subset CP^1$ [13]:

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}_\xi} J^\mu_\nu \equiv \tilde{X}_\xi J^\mu_\nu + J^\mu_\sigma \tilde{X}^\sigma_{\xi,\nu} - J^\sigma_\nu \tilde{X}^\mu_{\xi,\sigma} = 0, \quad \forall \xi \in so(5,1)$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}_\xi} \epsilon^i_j \equiv \tilde{X}_\xi \epsilon^i_j + \epsilon^i_k \tilde{X}^k_{\xi,j} - \epsilon^k_j \tilde{X}^i_{\xi,k} = 0, \quad \forall \xi \in so(5,1) \tag{4}$$

где $\mathcal{L}_{\tilde{X}_\xi}$ — производная Ли вдоль векторного поля $\tilde{X}_\xi$ на Z, $\epsilon^2_1 = -\epsilon^1_2 = 1$, $i,j,\ldots = 1,2$. Отметим, что мы используем локальные координаты y_i на сфере $S^2 \simeq CP^1$, связанные с координатами s_a соотношениями: $y_1 = s_1/(1+s_3)$, $y_2 = s_2/(1+s_3)$, $y_1 + iy_2 = \lambda$. Необходимая нам реализация алгебры Ли $so(5,1)$ как подалгебры $\{\tilde{X}_\xi, \xi \in so(5,1)\}$ в алгебре векторных полей на Z задается формулами:

$$\tilde{X}^a = X^a, \;\; \tilde{Y}^a = Y^a + 2Z^a, \;\; \tilde{P}_\mu = P_\mu, \;\; \tilde{K}_\mu = K_\mu + \bar{\eta}^a_{\sigma\mu} x_\sigma Z^a, \;\; \tilde{D} = D, \tag{5}$$

где генераторы Z^a группы $SO(3)$-вращений на S^2 определены следующим образом:

$$Z^a = \epsilon^a_{bc} s_b \frac{\partial}{\partial s_c}.$$

Нетрудно убедиться, что для векторных полей (5) уравнения (4) действительно выполняются.

3) Для того, чтобы редуцировать линейную систему (2) относительно действия подгруппы G конформной группы, мы налагаем условия G-инвариантности на потенциалы A_μ и на вектор-функцию $\Psi(x,\lambda)$ [13, 14]:

$$\mathcal{L}_{X_\xi} A_\mu \equiv X_\xi A_\mu + A_\sigma X^\sigma_{\xi,\mu} = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, \tag{6а}$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}_\xi} \Psi \equiv \tilde{X}_\xi \Psi = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, \tag{6б}$$

где $\mathcal{G}$ — алгебра Ли подгруппы $G \subset SO(5,1)$. Для простоты мы ограничимся условиями (6) строгой инвариантности, хотя в общем случае A_μ и Ψ могут быть инвариантны с точностью до калибровочных преобразований [15].

4) В соответствии с общим методом редукции по группам симметрии (см.[14] и ссылки там) выберем в качестве "новых" координат на Z координаты θ_ξ на орбитах группы G и инвариантные координаты θ_A и ζ, параметризующие пространство орбит и удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \zeta = 0, \quad \mathcal{L}_{\tilde{X}_\xi} \theta_A \equiv \tilde{X}_\xi \theta_A = 0, \quad \mathcal{L}_{\tilde{X}_\xi} \zeta \equiv \tilde{X}_\xi \zeta = 0, \;\; \forall \xi \in \mathcal{G}. \tag{7}$$

Инвариантная комплексная координата ζ будет новым "спектральным параметром".

Наиболее общий вид G-инвариантных потенциалов A_μ, являющихся решениями уравнений (6а), может быть записан в терминах $gl(n,C)$-значных функций от инвариантных координат θ_A и функций от координат θ_ξ на орбитах. Решением же уравнений (6б) является произвольная функция от инвариантных координат: $\Psi = \psi(\theta_A, \zeta)$.

5) Мы должны подставить функции A_μ и ψ в пару Лакса (2). Тогда мы получим редуцированную пару Лакса как систему двух линейных дифференциальных уравнений в терминах функций от инвариантных координат. Условие совместности этой системы совпадет с редуцированными относительно действия группы G уравнениями автодуальности, что следует из общей теории редукции дифференциальных уравнений по группам симметрии [14]. В случае, если среди генераторов группы G есть один из трех генераторов Y_a, введенных в (3), то редуцированная пара Лакса будет содержать производные по новому спектральному параметру ζ. Это связано с тем, что поднятие $Y_a \to \tilde{Y}_a$ на $Z = R^4 \times S^2$ нетривиально, и генерируемые $\tilde{Y}_a$ вращения являются комбинацией вращений в R^4 и в S^2.

4. Проиллюстрируем описанную выше схему тремя примерами редукции пары Лакса (2) по абелевым группам симметрии, одним из генераторов которых является Y^3. Нетривиальная редукция по неабелевой подгруппе $SO(3)$ группы $SO(5,1)$ описана в [16].

Пример 1. Рассмотрим одномерную абелеву группу $SO(2)$, генерируемую векторным полем Y^3. Введем на $R^4 \times CP^1$ переменную φ (координата на орбите), и инвариантные переменные $\{r, R, \chi, \zeta = a\exp(-i\eta)\}$ $(r, R, a > 0,\ 0 \leq \varphi, \chi, \eta < 2\pi)$, удовлетворяющие (7), которые связаны с координатами $\{x_\mu, \lambda = a\exp(-i\xi)\}$ на $R^4 \times CP^1$ $(0 \leq \xi < 2\pi)$ следующим образом:

$$x_1 = r\cos(\chi - \varphi - \frac{\eta}{4}),\ x_2 = -r\sin(\chi - \varphi - \frac{\eta}{4}),\ x_3 = R\cos(\chi + \varphi + \frac{\eta}{4}),$$

$$x_4 = -R\sin(\chi + \varphi + \frac{\eta}{4}), \quad \xi = \frac{\eta}{2} - 2\varphi \ \Rightarrow\ \lambda = \zeta\exp(i(\frac{\eta}{2} + 2\varphi)).$$

Для поднятого на Z векторного поля $\tilde{Y}^3$ имеем:

$$\tilde{Y}^3 = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - x_3\partial_4 + x_4\partial_3 + 2i(\lambda\partial_\lambda - \bar{\lambda}\partial_{\bar{\lambda}}) = \partial_\varphi.$$

Решение уравнений (6а) имеет вид

$$A_1 = a_1\cos(\chi - \varphi - \frac{\eta}{4}) + a_2\sin(\chi - \varphi - \frac{\eta}{4}),$$

$$A_2 = -a_1\sin(\chi - \varphi - \frac{\eta}{4}) + a_2\cos(\chi - \varphi - \frac{\eta}{4}),$$

$$A_3 = a_3\cos(\chi + \varphi + \frac{\eta}{4}) + a_4\sin(\chi + \varphi + \frac{\eta}{4}),$$

$$A_4 = -a_3\sin(\chi + \varphi + \frac{\eta}{4}) + a_4\cos(\chi + \varphi + \frac{\eta}{4}), \tag{8}$$

где $a_\mu = a_\mu(r, R, \chi)$. Решением уравнений (6б) является $\Psi = \psi(r, R, \chi, \zeta)$. Подставляя (8) и ψ в пару Лакса (2), мы получаем следующую редуцированную систему:

$$\nabla_X\psi \equiv (X + A_X)\psi =$$

$$= \left[\partial_r - \zeta\partial_R + (\frac{\zeta}{R} - \frac{1}{r})i\partial_\chi + (\frac{1}{r} + \frac{\zeta}{R})\zeta\partial_\zeta + a_1 + ia_2 - \zeta(a_3 + ia_4)\right]\psi = 0, \tag{9a}$$

$$\nabla_Y \psi \equiv (Y + A_Y)\psi =$$

$$= \left[\zeta\partial_r + \partial_R + (\frac{1}{R} + \frac{\zeta}{r})i\partial_\chi - (\frac{\zeta}{r} - \frac{1}{R})\zeta\partial_\zeta + a_3 - ia_4 + \zeta(a_1 - ia_2)\right]\psi = 0, \qquad (9б)$$

где векторные части в (9а) и (9б) обозначены соответственно через X и Y. Уравнения автодуальности (1) редуцируются к [8]

$$\partial_r a_3 - \partial_R a_1 - \frac{1}{r}\partial_\chi a_4 + \frac{1}{R}\partial_\chi a_2 + [a_2, a_4] + [a_1, a_3] = 0,$$

$$\partial_r a_4 + \partial_R a_2 + \frac{1}{r}\partial_\chi a_3 + \frac{1}{R}\partial_\chi a_1 + [a_1, a_4] + [a_3, a_2] = 0, \qquad (10)$$

$$\partial_R a_4 - \partial_r a_2 + \frac{1}{R}a_4 - \frac{1}{r}a_2 + \frac{1}{R}\partial_\chi a_3 - \frac{1}{r}\partial_\chi a_1 - [a_1, a_2] + [a_3, a_4] = 0$$

и совпадают с условием совместности $[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} = 0$ пары Лакса (9).

Пример 2. Рассмотрим двумерную абелеву подгруппу $SO(2) \times SO(2)$ в $SO(5,1)$, генерируемую векторными полями X^3 и Y^3, причем орбиты параметризуются φ и χ, а пространство орбит — инвариантными координатами r, R и $\zeta = \lambda \exp(-i(\frac{1}{2}\eta + 2\varphi))$. После поднятия на Z векторные поля $\tilde{X}^3$ и $\tilde{Y}^3$ имеют вид $\tilde{X}^3 = -\partial_\chi$, $\tilde{Y}^3 = \partial_\varphi$.

Решение уравнений (6а) имеет вид (8) с $a_\mu = a_\mu(r, R)$, а решение уравнений (6б) имеет вид $\Psi = \psi(r, R, \zeta)$. Редуцированную пару Лакса можно получить из (9), полагая $\partial_\chi \psi = 0$. Редуцированные уравнения автодуальности, в свою очередь, следуют из (10), если $\partial_\chi a_\mu = 0$.

Пример 3. Выберем трехмерную абелеву подгруппу группы $SO(5,1)$ с генераторами Y^3, P_3, P_4. Имеем

$$\tilde{Y}^3 = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - x_3\partial_4 + x_4\partial_3 + 2i(\lambda\partial_\lambda - \bar{\lambda}\partial_{\bar{\lambda}}) = \partial_\varphi, \quad \tilde{P}_3 = \partial_3, \quad \tilde{P}_4 = \partial_4,$$

где $x_1 = r\cos(\chi + \eta)$, $x_2 = -r\sin(\chi + \eta)$, $\lambda = a\exp(i2(\eta - \chi))$, $r, a > 0$, $0 \le \chi, \eta < 2\pi$. В качестве координат на орбитах мы выбрали χ, x_3, x_4, а в качестве инвариантных координат $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\zeta = \lambda\exp(i2\chi - i3\eta) = a\exp(-i\eta)$. Инвариантные поля ЯМ имеют вид

$$A_1 = a_1(r)\cos(\chi + \eta) + a_2(r)\sin(\chi + \eta), \qquad A_2 = -a_1(r)\sin(\chi + \eta) + a_2(r)\cos(\chi + \eta),$$

$$A_3 = a_3(r)\cos(\chi + \eta) - a_4(r)\sin(\chi + \eta), \qquad A_4 = a_3(r)\sin(\chi + \eta) + a_4(r)\cos(\chi + \eta), \quad (11)$$

а $\Psi = \psi(r, \zeta)$. После подстановки (11) и ψ, пара Лакса (2) редуцируется к системе:

$$\left[\partial_r + \frac{2}{r}\zeta\partial_\zeta + a_1 + ia_2 - \zeta(a_3 + ia_4)\right]\psi = 0,$$

$$\left[\zeta\partial_r - \frac{2}{r}\zeta^2\partial_\zeta + a_3 - ia_4 + \zeta(a_1 - ia_2)\right]\psi = 0. \qquad (12)$$

Нетрудно проверить, что условие совместности системы (12) совпадает с уравнениями автодуальности, редуцированными относительно той же подгруппы $SO(2) \times SO(2)$:

$$\dot{a}_2 + \frac{1}{r}a_2 + [a_1, a_2] + [a_4, a_3] = 0, \qquad \dot{a}_3 - \frac{1}{r}a_3 + [a_1, a_3] + [a_2, a_4] = 0,$$

$$\dot{a}_4 - \frac{1}{r}a_4 + [a_1, a_4] + [a_3, a_2] = 0, \tag{13}$$

где $\dot{a}_\mu \equiv da_\mu/dr$. После замены переменных $t = \ln r$, $u_1 = ra_2$, $u_2 = r^{-1}a_3$, $u_3 = r^{-1}a_4$ и выбора калибровки $a_1 = 0$, уравнения (13) совпадут с модифицированными уравнениями Нама, рассмотренными в [8].

Один из авторов (А.Д.П.) благодарит за гостеприимство Математический факультет университета Альберты (Эдмонтон) и Центр математических исследований при Монреальском университете, где эта работа была начата, а также Физический институт им.Макса Планка (Мюнхен), где работа была завершена.

Эти исследования были частично поддержаны грантом Национального научного комитета Канады, программой Гейзенберг–Ландау, а также грантом Гуманитарного фонда Сороса, присужденного А.Д.П. Американским Физическим Обществом.

---

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwarz and Yu.S.Tyupkin, Phys. Lett. **B59**, 81 (1975).
2. A.A.Belavin and V.E.Zakharov, Phys. Lett. **B73**, 53 (1978).
3. R.S.Ward, Phys. Lett. **A61**, 81 (1977); M.F.Atiyah and R.S.Ward, Commun. Math. Phys. **55**, 117 (1977); M.F.Atiyah, Classical Geometry of Yang-Mills Fields, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
4. D.E.Lerner, J.Geom. and Phys. **8**, 211 (1992).
5. S.V.Manakov and V.E.Zakharov, Lett. Math. Phys. **5**, 247 (1981).
6. R.S.Ward, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A315**, 451 (1985); Lect. Notes Phys. **280**, 106 (1987); Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **156**, 246 (1990); L.J.Mason and G.A.J.Sparling, Phys. Lett. **A137**, 29 (1989); J. Geom. and Phys. **8**, 243 (1992); M.J.Ablowitz and P.A.Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
7. S.Chakravarty, M.J.Ablowitz, and P.A.Clarkson, Phys. Rev. Lett. **65**, 1085 (1990); I.Bakas and D.A.Depireux, Mod. Phys. Lett. **A6**, 399 (1991); S.Chakravarty and M.J.Ablowitz, in: Painleve Transcendents, eds. D.Levi and P.Winternitz, Plenum Press, New York, 1992, p. 331; T.A.Ivanova and A.D.Popov, Phys.Lett. **A170**, 293 (1992); M.J.Ablowitz, S.Chakravarty and L.A.Takhtajan, Comm. Math. Phys. **158**,1289 (1993).
8. M.Kovalyov, M.Legaré and L.Gagnon, J. Math. Phys. **34**, 3425 (1993).
9. L.J.Mason and N.M.J.Woodhouse, Nonlinearity **1**, 73 (1988); **6**, 569 (1993); J.Fletcher and N.M.J.Woodhouse, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **156**, 260 (1990).
10. В.А.Белинский, В.Е.Захаров, ЖЭТФ, **75**, 1953 (1978); **77**, 3 (1979).
11. M.F.Atiyah, N.J.Hitchin and I.M.Singer, Proc. R. Soc. Lond. **A362**, 425 (1978).
12. M.K.Prasad, Physica **D1**, 167 (1980).
13. A.Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958; S.Kobayashi, Transformation groups in differential geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
14. P.J.Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986; P.Winternitz, in: Partially Integrable Evolution Equations in Physics, eds. by R.Conte and N.Boccara, NATO ASI Series C, v.310, Kluwer Academic Publ., 1990, p.515.
15. P.Forgács and N.S.Manton, Commun. Math. Phys. **72**, 15 (1980); J.Harnad, S.Shnider and L.Vinet, J. Math. Phys. **21**, 2719 (1980); R.Jackiw and N.S.Manton, Ann. Phys. **127**, 257 (1980).
16. T.A.Ivanova and A.D.Popov, Lett. Math. Phys. **23**, 29 (1991).