

## МИМИКРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И "ЭФФЕКТ БОЛЬШОЙ РЕКИ"

А.Э.Филиппов

Донецкий физико-технический институт АН Украины  
340114 Донецк, Украина

Поступила в редакцию 11 мая 1994 г.

Обсужден недавно предложенный механизм "мимикрии" флуктуационно индуцированных фазовых переходов первого рода под фазовые переходы второго рода, связанный с прохождением фазовых траекторий ренормализационной группы (РГ) через минимум потока. Адекватность применения точного уравнения РГ к проблеме и существование искомого минимума потока подтверждены с использованием "эффекта большой реки", характерного для нелинейных релаксационных уравнений.

В недавней работе [1] была предложена идея мимикрии флуктуационно индуцированных фазовых переходов первого рода (ФП1) под фазовые переходы второго рода (ФП2). Суть ее вкратце в следующем. Если устойчивая неподвижная точка уравнения ренормализационной группы (РГ) отсутствует или затравочные значения параметров лежат за сепаратрисами области притяжения к ней, то фазовые траектории РГ пересекают границы положительности формы четвертого порядка функционала свободной энергии, что принято интерпретировать как индуцирование флуктуациями ФП1 в системе. Однако в работе [1] отмечено, что траектории РГ при этом могут проходить через область минимума скорости эволюции параметров (минимум потока). Поведение физических величин в окрестности этого минимума качественно аналогично таковому при ФП2. Последнее предлагается в качестве весьма реалистичной причины расхождения между теорией, предсказывающей ФП1 для ряда систем, и экспериментом, а также между результатами различных экспериментов.

Применение модели  $\varphi^4$  к теории фазовых переходов порождает ряд проблем принципиального характера. Чтобы обойти их, в работе [1] было использовано точное уравнение РГ [2] в его локальной версии, обычно достаточной для обсуждения качественных предсказаний теории [3-5]:

$$\dot{f} = \hat{R}f = df + \sum_i \left[ f_{\varphi_i \varphi_i} - \frac{d-2}{2} f_{\varphi_i} \varphi_i - f_{\varphi_i}^2 \right]. \quad (1)$$

Здесь  $f\{\varphi_i\}$  - локальная плотность функционала свободной энергии

$$\mathcal{H}[\varphi] = \int d^d r \left[ \sum_i (\nabla \varphi_i)^2 + f\{\varphi_i\} \right], \quad (2)$$

а суммирование выполняется по  $n$  различным компонентам вектора  $\vec{\varphi} = \{\varphi_i\}$ . В работе [1] уравнение (1) было переписано в форме

$$\dot{\mu} = \hat{R}\mu = d \mu \ln(\mu) + \sum_i \left[ \mu_{\varphi_i \varphi_i} - \frac{d-2}{2} \mu_{\varphi_i} \varphi_i \right], \quad (3)$$

где  $\mu = \exp(-f)$ , более удобной в ряде случаев. Интенсивность потока можно охарактеризовать нормой  $\|\dot{\mu}\| = \langle \dot{\mu} | \dot{\mu} \rangle^{1/2}$ . Скалярное произведение  $\langle \psi | \xi \rangle = \int d^n \varphi \rho(\varphi) \psi(\varphi) \xi(\varphi)$ , в котором содержится весовая функция  $\rho(\varphi) = \exp(-(d-2)\varphi^2/4)$ , определяется структурой квазилинейного оператора

$$\hat{L} = \partial \dot{\mu} / \partial \mu = d\mu(1 + \ln(\mu)) + \sum_i \left[ \partial_{\varphi_i} \partial_{\varphi_i} - \frac{d-2}{2} \partial_{\varphi_i} \varphi_i \right].$$

Основная гипотеза работы [1] состояла в том, что минимум потока  $\mu = \mu^*$  (для которого  $\partial \|\dot{\mu}\|^2 / \partial \mu(\varphi')|_{\mu=\mu^*} = 0$ ) существует. Раскладывая  $\dot{\mu}$  по базису  $\psi_k$ :  $\dot{\mu} = \sum \beta_k \psi_k$ , и проектируя затем последовательно на векторы  $\psi_j$ , нетрудно получить, что при этом  $\int d^n \varphi' \partial \|\dot{\mu}\|^2 / \partial \mu(\varphi') \psi_j(\varphi') = 2\beta_j \lambda_j = 0$ , где  $\lambda_j$  – собственные векторы оператора  $\hat{L}$ . Поскольку хотя бы некоторые из  $\beta_j \neq 0$ , то существуют  $\lambda_j = 0$ . Эволюция РГ параметров в соответствующих направлениях аномально медленна. Линеаризуя  $\mu$  вблизи  $\mu^*$  и выполняя стандартные действия флуктуационной теории, нетрудно прийти к поведению физических величин, похожему на их поведение при обычном ФП2. Поскольку, однако, использование РГ уравнения (1) (или (3)) вместо модели  $\varphi^4$  порождает инварианты  $O_k(\varphi^2)$  сколь угодно высокого порядка в локальной плотности  $f(\varphi) = \sum_k \hat{g}_k O_k(\varphi^2)$ , то заранее не ясно, в какой мере присутствие высших вершин  $\hat{g}_k$  влияет на картину фазовых траекторий. Кроме того, требует доказательства и предположение о существовании минимума.

В работе [5] нами было показано, что благодаря квадратичной (изотропной) асимптотике  $f^* \propto \varphi^2/2$  физической ветви решения уравнения  $\hat{R}f^* = 0$ , неподвижные решения ("точки") уравнения (1) (и проходящие через них сепаратрисы) можно получить преобразованиями группы симметрии системы, примененными к "изинговской" неподвижной точке, являющейся суммой невзаимодействующих решений  $f_I^* = \sum_i f_I^*(\varphi_i)$ . Там же на примере тетрагональной (2-компонентной) системы продемонстрировано качественное родство фазовых портретов для уравнения (1) и модели  $\varphi^4$ . Принимая это во внимание, удобно ограничиться в этой заметке окрестностью интеграла  $f_I(\varphi; t) = \sum_i f_I(\varphi_i; t)$  и продемонстрировать на его базе как несущественность старших вершин для качественной картины, так и существование минимума потока при малом отклонении затравок от  $f_I(\varphi; t)$ .

Критическая поверхность для

$$f_I(\varphi_i; t) = \sum_k g_{2k}(t) (\varphi_1/2)^{2k}$$

может быть получена методом стрельбы [6, 7]. Коэффициенты ряда Тейлора  $g_{2k}(t)$  при этом определяются численно. На рис.1 показаны проекции нескольких траекторий РГ на плоскость  $(g_4, g_6)$ . При всех затравках  $g_{2k}$  вначале быстро приближаются к некоторой универсальной кривой, вдоль которой затем медленно эволюционируют к неподвижной точке  $f_I^*(\varphi_i)$ . Аналогичное явление было недавно обнаружено на основе несколько иной версии локального уравнения РГ и названо [7] "эффектом большой реки". Этот феномен достаточно типичен для релаксационных нелинейных уравнений, к которым принадлежит

(1) (или (3)). В частности, с ним связано достижение минимума диссипации на стационарных (аттракторных) траекториях в задачах физической кинетики [8, 9]. В общем случае этот феномен отражает быстрое "стекание" фазовых траекторий в некоторую (квази-) потенциальную долину, вдоль которой переменные затем медленно "сползают" к неподвижной точке. Причем, для седловых точек это "сползание" аномально медленное (степенное вместо экспоненциального). Однако неподвижные точки РГ всегда седловые, поскольку при малых отклонениях температуры от критической поверхности РГ траектории, пройдя через минимум потока, всегда удаляются от неподвижной точки.

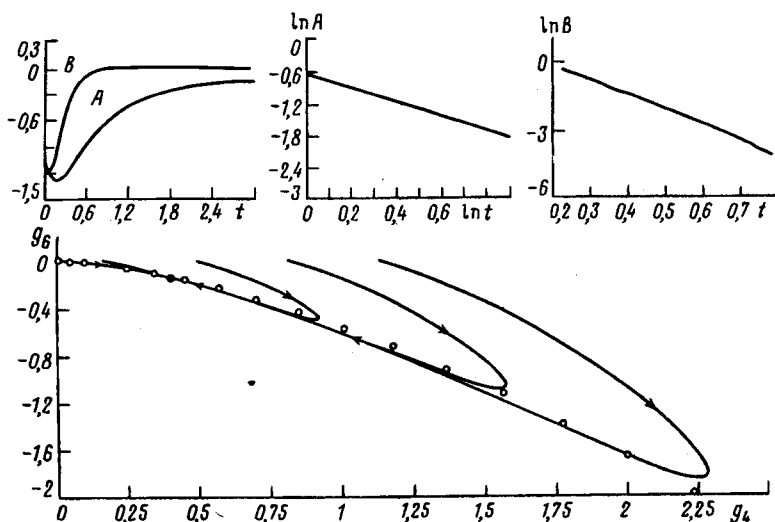


Рис.1. Проекция фазовых траекторий на плоскость  $(g_4, g_6)$ . Аналитическая оценка для траектории "большой реки" показана точками. На вставках показаны эволюция со временем комбинаций  $A = g_2 - g_2^*$  и  $B = g_4 - g_2(2 - g_2)/3$ , а также  $\ln(A)$ ,  $\ln(B)$  от  $\ln t$  и  $t$ , соответственно

Траектория "большой реки" может быть оценена аналитически. Уравнение для  $g_{2k}(t)$  имеет вид

$$\partial g_{2k} / \partial t = [d - (d-2)k]g_{2k} - \sum_{m=2}^{k+1} m(k+1-m)g_{2m}g_{2(k+1-m)} + (2k+1)(k+1)g_{2(k+1)}/2. \quad (4)$$

Минимум потока достигается при  $\partial g_{2k} / \partial t \approx 0$ . В этой области

$$g_{2(k+1)} \approx 2 \left[ [(d-2)k - d]g_{2k} + \sum_{m=1}^{k+1} m(k+1-m)g_{2m}g_{2(k+1-m)} \right] / (2k+1)(k+1)g_{2(k+1)}. \quad (5)$$

Рекурсионные соотношения (5) определяют  $g_{2k} = g_{2k}(g_2)$  как функции единственного параметра  $g_2$  на кривой, проходящей через неподвижную точку [5]:  $g_0 \approx 0,076$ ,  $g_2 \approx -0,456$ ,  $g_4 \approx 0,373$ ,  $g_6 \approx -0,141$ ,  $g_8 \approx 0,067, \dots$  На рис.1 проекция этой кривой на плоскость  $(g_4, g_6)$  показана точками и, очевидно, весьма близка к численно найденной траектории "большой реки". На вставках к рис.1 показаны также эволюция со временем комбинаций  $A = g_2 - g_2^*$  и  $B = g_4 - g_2(2 - g_2)/3$ , а также зависимости  $\ln(A)$  и  $\ln(B)$  от  $\ln t$  и  $t$ , соответственно, иллюстрирующие быстрое экспоненциальное спадание разности

$B \propto \exp(-0.15t)$  и медленное степенное ( $A \propto t^{-4/3}$ ) притяжение системы к седловой неподвижной точке. Аттракторный характер "большой реки" обеспечивает универсализацию критического поведения при различных физических затравках в пертурбативном подходе, основанном на использовании точного уравнения РГ [6, 7]. Вместе с тем, это делает несущественным влияние старших вершин на качественную структуру фазового портрета, поскольку они быстро "подстраиваются" под изменение существенной вершины  $g_2$  (и некоторых из вершин  $\hat{g}_4$ , также существенных в анизотропных моделях). В частности, должна сохраняться качественная картина поведения траекторий РГ в окрестности седловой точки  $f_I^* = \sum_i f_I^*(\varphi_i)$ , полученная в модели  $\varphi^4$ , обеспечивающая очевидный минимум потока в этой окрестности. Последнее было проверено непосредственным численным интегрированием уравнения (3) для тетрагональной системы с затравочной функцией  $\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \exp(-f(\varphi_1, \varphi_2))$ , зависящей от инварианта  $u(\varphi_1^4 + \varphi_2^4)$  при малой добавке взаимодействия  $v(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$  (где  $u \propto 10^{-2}v$ ).

Рис.2 иллюстрирует эволюцию поверхности  $\mu(\varphi_1, \varphi_2)$  со временем. На начальном этапе ( $t \leq 2$ ) обе поверхности, стартующие по разные стороны от

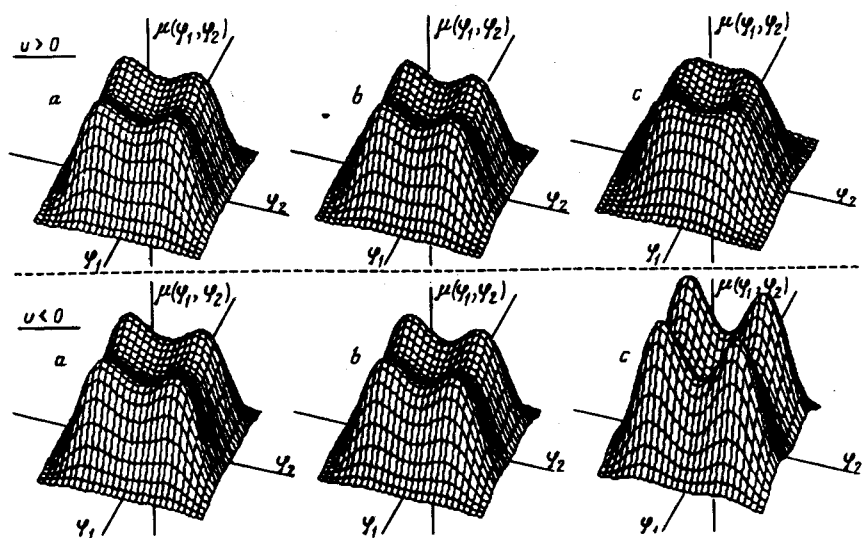


Рис.2. Эволюция поверхности  $\mu(\varphi_1, \varphi_2)$  с РГ временем при  $v > 0$  и  $v < 0$ , соответственно

сепаратрисы, стремительно достигают "большой реки", вдоль которой медленно притягиваются к неподвижной точке  $f_I^* = \sum_i f_I^*(\varphi_i)$  ( $2 \leq t \leq 25$ ). В этот период обе поверхности практически неотличимы друг от друга и мало меняются по сравнению с их формой, достигнутой на этапе  $t \leq 2$  (что, собственно, и иллюстрируют первые две пары рисунков  $a - b$ ). Однако после прохождения минимума потока скорость эволюции параметров быстро нарастает, и поверхности начинают сильно различаться. При  $v > 0$  поверхность  $\mu(\varphi_1, \varphi_2)$  изотропизуется, что соответствует притяжению системы к устойчивой  $O(n = 2)$ -симметричной точке (так называемая "асимптотическая симметрия" [10]). При  $v < 0$  экстремумы  $\mu(\varphi_1, \varphi_2)$ , напротив, расходятся и увеличиваются.

Для локальной плотности  $f(\varphi_1, \varphi_2)$  это соответствует углублению минимумов и их удалению от точки  $\varphi = 0$ , которое, как можно показать, ведет к флуктуационному срыву ФП2 на ФП1. Принимая во внимание, что по пути к этому состоянию система проходила через ярко выраженный минимум скорости эволюции параметров, можно заключить, что "мимикрия" флуктуационно индуцированных ФП1 под ФП2, предположена в [1], может иметь место в действительности.

Я благодарю проф. Бадиали (J.P.Badiali) за гостеприимство и сотрудничество в Университете Пьера и Марии Кюри (Paris VI), в ходе которого была сформулирована идея использования "эффекта большой реки" к различным проблемам устойчивости фазовых переходов. Я также признателен профессорам Багниолсу (C.Bagnuls) и Бервилье (C.Bervillier) за полезные дискуссии и любезно предоставленные последние результаты исследования точного уравнения РГ.

- 
1. G.Zumbach, Phys. Rev. Lett. **71**, 2421 (1993).
  2. K.G.Wilson and G.Kogut, Phys. Rep. C **12**, 240 (1974).
  3. V.Tokar, Phys. Lett. A **104**, 135 (1984).
  4. G.Felder, Commun. Math. Phys. **11**, 101 (1987).
  5. S.A.Breus and A.E.Filippov, Physica A **192**, 486 (1993).
  6. C.Bagnuls and C.Bervillier, Phys. Rev. B **41**, 402 (1990).
  7. C.Bagnuls and C.Bervillier, Preprint, Centre d'Etudes Nucl. Saclay, 1994.
  8. G.N.Bochkov and Yu.E.Kuzovlev, Physica A **104**, 443; 480 (1981).
  9. Ю.Е.Кузовлев, Т.К.Соболева, А.Э.Филиппов, ЖЭТФ **103**, 1742 (1993).
  10. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский, Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.