Письма в ЖЭТФ, том 37, вып.3, стр. 160 – 161 *5 февраля 1983 г.*

РЕДУКЦИЯ $U(\infty)$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ К МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Р.Л.Мкртчян, С.Б.Хохлачёв

Рассмотрен предел $N \to \infty$, $U(N)$-инвариантных суперсимметричных теорий. Показано, что при редукции таких теорий по Эгучи – Каваи к модели случайных матриц не нужно производить заморозку импульсов. Это утверждение значительно упростит численные расчеты в таких теориях.

В последнее время, после работы Эгучи – Каваи [1], значительный интерес вызывает изучение предела $N \to \infty$ $U(N)$-инвариантных калибровочных и общих матричных теорий [2 - 5]. Основное достижение нового подхода к пределу $N \to \infty$ заключается в том, что главный по N порядок от любой инвариантной величины представлен как некоторое среднее в подходящей модели случайных матриц, не зависящих от координат. Например, для матричной ϕ^4 теории при $N \to \infty$ величина $\langle \frac{1}{N} Tr\,\phi(x)\phi(0) \rangle$ равна

$$\int dp \langle \exp(-S(p, \phi)) \frac{1}{N} Tr\,(e^{-ipx}\phi e^{ipx}\phi) \rangle_\phi ,$$

$$S(p, \phi) = Tr\,(-\frac{1}{2}[p_m, \phi]^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{N}\phi^4).$$

Здесь ϕ – $N \times N$ матрица, p_m – диагональные $N \times N$ матрицы (называемые импульсами[1)]), а $\langle \cdots \rangle_\phi$ означает усреднение по ϕ, т.е.:

$$\langle \ldots \rangle_\phi = \int d\phi \exp(-S(p, \phi)) \ldots / \int d\phi \exp(-S(p, \phi)).$$

Такая процедура последовательного усреднения по ϕ и интегрирования по импульсам получила название заморозки импульсов.

Наше утверждение состоит в том, что для предела $N \to \infty$ суперсимметричных теорий отпадает нужда в заморозке импульсов, достаточно просто интегрировать по суперполю ϕ и потом по p. (Строго говоря, мы докажем его здесь только для некалибровочных теорий, относительно суперсимметричной теории Янга – Миллса см. ниже).

Утверждение основано на том, что множитель $Z(p) = \int d\phi \exp(-S(p, \phi))$, на который делится интеграл по полям ϕ, равен единице в суперсимметричных теориях. Из этого факта после интегрирования по импульсам и устремления N к бесконечности следует известное утверждение о занулении свободной энергии в суперсимметричных теориях [6]. Перейдем к точным формулировкам.

Рассмотрим для определенности матричную модель Весса – Зумино. Пусть $\phi(\theta, \bar\theta)$ – киральное суперполе. Здесь „суперполе" означает, что $\phi(\theta, \bar\theta)$ преобразуется при преобразованиях суперсимметрии следующими генераторами, реализующими алгебру суперсимметрии в пространстве $N \times N$ матриц, зависящих от $\theta, \bar\theta$:

$$S_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - (\sigma^m\bar\theta)_a[p_m, \qquad \bar S_{\dot a} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot a}} + (\theta\sigma_m)_{\dot a}[p_m .$$

Киральность суперполя $\phi(\theta, \bar\theta)$ означает, что $\bar D_{\dot a}\phi(\theta, \bar\theta) = 0$, где $\bar D_{\dot a} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot a}} - (\theta\sigma_m)_{\dot a}[p_m$.

---

1) Такое название связано с тем, что при построении теории возмущений матричные элементы p_m дают импульсы в диаграммах Фейнмана.

Действие для редуцированной формы матричной модели Весса – Зумино есть

$$S(p,\phi) = \int d^2\theta\, d^2\bar{\bar\theta}\; Tr\,\phi^+ \phi - \frac{m}{2}\left(\int d^2\theta\, Tr\,\phi^2 + \text{э.с.}\right) - \frac{g}{N}\left(Tr\,L_{int} + \text{э.с.}\right),$$

$$L_{int} = \int d^2\theta\, \phi^3.$$

Доказательство $Z(p) = 1$ аналогично доказательству того, что статсумма в суперсимметричных теориях равна единице [6], так как и здесь лагранжиан L_{int} есть F-компонента супермультиплета. Поэтому он появляется при преобразованиях суперсимметрии над ψ-компонентой этого супермультиплета:

$$\delta(Tr\,\psi) = \epsilon\, Tr\, L_{int} + (\sigma_m \bar\epsilon)\, Tr\,[p_m, A]\;,$$

где введены и остальные компоненты супермультиплета, к которому принадлежит L_{int}. После интегрирования по $\phi(\theta,\bar\theta)$ левая часть зануляется в силу суперсимметрии, последний член в правой части зануляется в силу Tr и, следовательно, равен нулю и первый. Это означает, что производная статсуммы по константе связи равна нулю, т.е. она равна статсумме при нулевой константе связи. Последняя равна единице в силу сокращения детерминантов для фермионов и бозонов. Это, после интегрирования по p, соответствует сокращению энергии нулевых колебаний фермионов и бозонов. Подчеркнем, что все отмеченные нами сокращения происходят еще до предела $N \to \infty$, хотя редуцированная модель эквивалентна нередуцированной, конечно, лишь в пределе $N \to \infty$.

В случае суперсимметричной теории Янга – Миллса (рассмотрим нерасширенную суперсимметрию) наше утверждение приводит к тому, что предел $N \to \infty$ такой теории описывается действием, которое есть обычное действие суперсимметричного Янга – Миллса, если в нем положить калибровочное суперполе $V(x,\theta,\bar\theta)$ не зависящим от x и опустить интегрирование по dx. Подчеркнем, что здесь с самого начала не вводятся импульсы, в отличие от случая чисто калибровочной теории [2–5], а они появятся при построении теории возмущений как параметры, описывающие многообразие классических вакуумов (которое здесь не есть $V = 0$ с точностью до калибровочных преобразований, а V – диагональная матрица с нулевой D-компонентой), и импульсами будет ее векторная компонента $-p_m \theta\, \sigma_m\, \bar\theta$. Можно показать, что такая теория удовлетворяет суперсимметричному контурному уравнению [7]. Однако нам не удалось еще построить теорию возмущений в явно суперсимметричном виде. Стоит отметить в связи с этим, что для обычного Янга – Миллса соответствующая редуцированная модель не обладает [2] явной лоренц-инвариантностью, которая восстанавливается лишь в пределе $N \to \infty$.

Мы благодарим А.А.Мигдала за интересные обсуждения.

Литература

1. *Eguchi T., Kawai H.* Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, 1063.
2. *Gross D.J., Kitozawa Y.* Prinseton preprint, 1982.
3. *Bhanot G., Heller U., Neuberger H.* Phys. Lett., 1982, **B112**, 47.
4. *Parizi G.* Phys. Lett., 1982, **B112**, 463.
5. *Migdal A.A.* Phys. Lett., 1982 (in press).
6. *Zumino B.* Nucl. Phys., 1975, **B89**, 535.
7. *Мкртчян Р.Л.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **34**, 235.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 ноября 1982 г.