

Образование конденсата и возникновение вихрей в бозе-газе при охлаждении

Е. А. Бренер, С. В. Иорданский⁺, Р. Б. Сапцов⁺

Institut für Festkörperforschung, Forschungszentrum Jülich, 52425 Jülich, Germany

⁺ *Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2004 г.

После переработки 8 апреля 2004 г.

Рассмотрен механизм перехода бозе-газа в сверхтекучее состояние путем тепловых флуктуаций в условиях внешнего охлаждения при температуре, выше температуры перехода. Вычислена вероятность образования таких критических флуктуаций – инстантонов, возрастающая по мере приближения к температуре перехода. Показано, что развитие отдельного инстантона невозможно без образования вихрей в его сверхтекучей части.

PACS: 3.75.Nt, 67.40.Vs

Представления о кинетике фазовых переходов развиты достаточно подробно для фазовых переходов первого рода и связаны с существованием как самой метастабильной фазы, так и равновесного критического зародыша. Соответствующая теория была развита в работах [1, 2] и подробно изложена в обзоре [3]. В то же время, теоретические представления о кинетике фазовых переходов второго рода, где оба эти факта не имеют места, мало развиты. В работе Лифшица [4] предложена некоторая специальная модель возникновения упорядоченной фазы после быстрой стадии фазового перехода в “ближнем” порядке при наличии только двух типов упорядочения.

В последнее время возник интерес к проблеме фазового перехода при быстром изменении внешних параметров (например, температуры) в связи с космологическими представлениями о “Большом взрыве”, когда быстро расширяющаяся Вселенная должна охлаждаться и может пройти через серию фазовых превращений с изменением симметрии вакуума [5]. Предполагается, что кинетика превращения может быть смоделирована в конденсированных средах [6].

В работах Зурека, подробно изложенных в обзоре [7], была развита теория фазового перехода второго рода при быстром изменении температуры в жидком He₄. Основным в предложенном механизме является предположение о “критическом замедлении” всех процессов в окрестности температуры перехода и “быстром” возникновении очагов новой фазы при достаточном последующем охлаждении. В результате получалось возникновение огромного количества дефектов, порядка числа флуктуаций далеко выше точки перехода.

Экспериментально, однако, никаких задержек в образовании новой фазы неизвестно, а критическое замедление связано с длительностью процесса установления равновесия на макроскопических расстояниях, что является несущественным при неоднородном процессе образования новой фазы.

В настоящей работе рассмотрен переход в новую фазу путем развития флуктуаций на масштабах, значительно меньших длины корреляции, который может происходить достаточно быстро и вблизи критической температуры. При этом кинетика перехода оказывается связанной непосредственно с самим процессом охлаждения. Мы рассмотрим процесс образования конденсата в модели слабонеидеального бозе-газа, включающей внешнее охлаждение, и покажем существование некоторой аналогии с фазовыми переходами первого рода.

Стандартная теория слабонеидеального бозе-газа имеет дело с гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p + \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m} \sum_p a^+_{p_4} a^+_{p_3} a_{p_2} a_{p_1}, \quad (1)$$

где a_0 – амплитуда рассеяния, имеющая атомную величину, m – масса атома. Свойства такого газа при малой плотности n (малость определяется газовым параметром $\eta = na_0^3 \ll 1$) близки к свойствам идеального бозе-газа с температурой перехода [8]:

$$T_c = \frac{3.31}{\sqrt{2}} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m}. \quad (2)$$

Идеальный бозе-газ при температурах, ниже перехода, имеет давление, зависящее только от температуры:

$$p_{id} = 0.0851 \frac{m^{3/2} T^{5/2}}{\hbar^3}, \quad (3)$$

что соответствует нулевой изотермической скорости звука.

С учетом ненулевой амплитуды рассеяния можно написать качественное уравнение состояния ниже точки перехода:

$$P = p_{id}(T) + \frac{\hbar^2 a_0 n^2}{m}. \quad (4)$$

Мы опустили несущественный постоянный множитель во втором члене.

Вся кинетика существенно зависит от механизма охлаждения бозе-газа. Мы рассмотрим наиболее простую модель, когда бозе-газ находится в матрице некоторого твердого тела, с которой он слабо взаимодействует. Такая ситуация может возникнуть, например, для газа экситонов в кристалле. Кристалл может быть быстро охлажден до низкой температуры, и в этом случае охлаждение бозе-газа будет происходить путем излучения фононов. Считая теплоемкость кристалла большой по сравнению с теплоемкостью бозе-газа, можно пренебречь наличием тепловых фононов в кристалле и их влиянием на бозе-газ. В результате мы будем иметь однородный механизм потерь энергии, описываемый феноменологически величиной $-T/\tau_{ph}$. Другие модели охлаждения приводят к необходимости рассматривать передачу тепла на границах образца, что существенно сложнее. Скорость потерь $1/\tau_{ph}$ определяется столкновениями частиц между собой и взаимодействием с фононами, которое мы будем считать слабым:

$$1/\tau_{ph} \ll 1/\tau_{tr},$$

что в силу того, что $1/\tau_{ph} \sim nv_T \sigma_{ph}$, $1/\tau_{tr} \sim nv_T a_0^2$ (v_T – тепловая скорость), означает

$$\sigma_{ph} \ll a_0^2,$$

где σ_{ph} – сечение рассеяния с излучением фононов, что соответствует слабости взаимодействия бозе-газа с кристаллом.

Ввиду малости величины $1/\tau_{ph}$ эволюция бозе-системы будет медленной, в частности, мы будем считать, что длина звуковой волны $c\tau_{ph} \sim v_T \tau_{ph}$ будет велика по сравнению с характерными расстояниями $\sim \sqrt{\chi \tau_{ph}}$, где χ – коэффициент температуропроводности:

$$\frac{\sqrt{\chi \tau_{ph}}}{v_T \tau_{ph}} \sim \sqrt{\frac{l^2}{v_T^2 \tau_{tr} \tau_{ph}}} \sim \sqrt{\frac{\tau_{tr}}{\tau_{ph}}} \ll 1$$

(через l обозначена длина свободного пробега). Это обстоятельство позволяет считать, что эволюция флуктуации происходит при постоянном давлении, совпадающем с термодинамически равновесным.

При этом изменение плотности δn в области флуктуации, как следует из (4), связано с изменением температуры:

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta T}{T} \frac{1}{\eta^{1/3}}. \quad (5)$$

Относительная флуктуация плотности велика по сравнению с относительной флуктуацией температуры в области $T < T_c$. Это обстоятельство приводит к быстрому росту обратного фононного времени:

$$\delta \frac{1}{\tau_{ph}} \sim -\frac{\delta T}{T} \frac{1}{\eta^{1/3}} \frac{1}{\tau_{ph}^0} \quad (6)$$

(где $1/\tau_{ph}^0 = nv_T \sigma_{ph}$) с падением температуры и усилением охлаждения в области флуктуации. В связи с этим мы будем пренебрегать излучением фононов в области вне развитой флуктуации, полагая

$$\frac{1}{\tau_{ph}} \sim -\frac{\delta T}{T_c} \frac{1}{\eta^{1/3}} \frac{1}{\tau_{ph}^0} U(T_c - T), \quad (7)$$

где $U(T_c - T) = 1$ при $\delta T = T - T_c < 0$ и $U(T_c - T) = 0$ при $T - T_c > 0$.

Это позволяет рассматривать задачу о кинетике флуктуации в рамках теории гидродинамических флуктуаций с добавлением в уравнения гидродинамики потока энергии, уносимого излучением фононов:

$$\frac{T}{\tau_{ph}^0} \frac{\delta n}{n} = -\frac{T_c - T}{\tau_{ph}} U(T_c - T), \quad (8)$$

где $1/\tau_{ph} = (1/\tau_{ph}^0)(1/\eta^{1/3})$. Ввиду постоянства давления, эволюция флуктуации температуры будет описываться уравнением теплопроводности:

$$nc_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = \nabla (\kappa \nabla T) + \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} nc_p U(T_c - T), \quad (9)$$

где добавлен поток энергии, уносимой фононами, κ – коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость на одну частицу при постоянном давлении. В этом уравнении имеется сносовый член с массовой скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, возникающий из-за большей плотности в ядре флуктуации. В дальнейшем он будет опущен как член более высокого порядка по величине флуктуации. Нас интересуют флуктуации поля T и их развитие во времени. Для рассмотрения флуктуаций необходимо ввести случайные потоки тепла \mathbf{q} [3, 9],

то есть ланжевеновский член $\nabla \mathbf{q}$. Эти потоки дельта-коррелированы (то есть коррелированы на расстояниях и временах малых, по сравнению с гидродинамическими масштабами). В данном случае это обеспечивается большой величиной времени τ_{ph} и расстояния $\sqrt{\chi \tau_{ph}}$ (χ – коэффициент температуропроводности) по сравнению с микроскопическими характеристиками. Хорошо известно, что в этом случае вероятность реализации $W_t(T(r))$ заданной конфигурации флуктуационного поля $T(r)$ в момент времени t подчиняется уравнению Фоккера–Планка в вариационных производных [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = - \int \frac{\delta}{\delta T(r)} \left[\frac{\chi T_\infty^2}{nc_p} \nabla^2 \frac{\delta}{\delta T(r)} W + \left[\chi \nabla^2 T + U(T_c - T) \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} \right] W \right] d^3 r. \quad (10)$$

При отсутствии взаимодействия с фононами стационарное решение этого уравнения дает результат, совпадающий с результатом термодинамической теории флуктуаций. Величина

$$\chi \nabla^2 T + U(T_c - T) \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

дает скорость изменения температуры при ее отклонении от средней: $T = T_\infty$.

Мы считаем, что флуктуация происходит при некотором фиксированном $T_\infty > T_c$. Флуктуации с $\Delta T = T - T_\infty \ll T_\infty$ происходят достаточно часто и имеют некоторое, фактически стационарное распределение в пространстве, которое определяет величину $P_t(T)$. Последняя, в силу нормировки, дает число небольших флуктуаций в единице объема. Однако иногда происходят редкие флуктуации достаточно большой амплитуды $\Delta T \sim T_c - T_\infty$, $T < T_c$, при которых начинается эффективное охлаждение фононами и флуктуация оказывается необратимой, возникает очаг новой фазы. Нашей целью является вычисление вероятности таких флуктуаций в единице объема и времени. Поскольку эти флуктуации редки и распределение в области малых $T_\infty - T$ стационарно, можно использовать метод характеристик для отыскания экспоненциально малой вероятности образования такого зародыша – инстантона для уравнения Фоккера–Планка. Существенное отличие от теории образования зародышей в фазовых переходах первого рода состоит в том, что вероятность образования инстантона в данном случае определяется самим процессом охлаждения.

Рассмотрим с целью разъяснения ситуацию с отысканием инстантонного решения в случае одной

степени свободы, когда уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial W}{\partial x} - v W \right), \quad (12)$$

где D – постоянный коэффициент диффузии, $v(x)$ – макроскопическая скорость изменения величины x с учетом процесса релаксации при отклонении ее от равновесного значения, а также внешнего воздействия (аналога излучения фононов). Полагая $W = e^S$ и считая, что по модулю S и его первая производная велики, получим, оставляя главные члены, уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - v \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (13)$$

Это уравнение Гамильтона–Якоби с гамильтонианом $(\partial S / \partial x = p)$

$$H \left(\frac{\partial S}{\partial x}, x \right) = -D p^2 + p v + \frac{\partial v}{\partial x},$$

уравнения Гамильтона являются характеристиками этого уравнения в частных производных:

$$\frac{dx}{dt} = -2Dp + v,$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dx} p - \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

Вклад дивергенции скорости в гамильтониан существенен только вблизи точки, где $v = 0$. Нас интересует специальное решение, которое проходит через точку равновесия $p = 0$, $v = 0$. В одномерном уравнении Фоккера–Планка с помощью замены можно избавиться от члена с первой производной, при этом получается аналогия с квантовой механикой, и можно использовать известные результаты. Мы, однако, будем использовать в окрестности $v = 0$ непосредственные оценки.

Энергия сохраняется в силу уравнений Гамильтона, что ввиду малости дивергентного члена дает $H = -Dp^2 + pv = 0$, откуда $p = v/D$ и

$$S = - \int \frac{v^2}{D} dt = \int_0^{x^*} \frac{v}{D} dx.$$

Мы считаем, что скорость $v(x)$ представляет собой выпуклую вниз функцию с двумя нулями – устойчивым в нуле и неустойчивым при x^* . Такая форма функции $v(x)$ обеспечивается всем процессом охлаждения, включая излучение фононов. При $x > x^*$ решение уходит в сторону больших x , а действие набирается от нуля до x^* , где $v < 0$. В окрестности x^*

необходимо учитывать величину dv/dx . При больших x можно пренебречь p^2 , что дает $p \approx -\frac{dv}{dx}/v$, поэтому

$$S \sim S_0 - \ln(v/v_0),$$

где v_0 – эффективная скорость в области, где происходит сшивка решений для $x < x^*$ и $x > x^*$. Само решение имеет вид $e^S \approx (v_0/v)e^{S_0}$ и ток $j \approx v_0 e^{S_0}$. Оценку v_0 можно получить, полагая, что все члены в гамильтониане H одного порядка:

$$Dp^2 \sim vp \sim \frac{dv}{dx} \sim \frac{v_{\max}}{x^*},$$

что дает

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{D|v_{\max}|}{x^*}} \sim \frac{|v_{\max}|}{\sqrt{|S_0|}}. \quad (14)$$

В многомерном случае ситуация сохраняется:

$$\frac{dx^i}{dt} = -2D^{ij}p_j + v^i,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial v^k}{\partial x^i}p_k - \frac{\partial(\operatorname{div}\mathbf{v})}{\partial x^i},$$

причем в начале $p = 0$ и $p \rightarrow 0$ в конце траектории. Поэтому $|p|$ достигает где-то на траектории максимума. В этой точке матрица $\partial v_i/\partial x_k$ имеет одно нулевое собственное значение и \mathbf{p} касается соответствующего собственного вектора, а дальше траектория уходит в окрестность точки с нулевой скоростью \mathbf{v} . Это дает определение критической флуктуации-инстантона как решения, проходящего через точку $\mathbf{x} = \mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{p} \rightarrow 0$, при $|x| \rightarrow \infty$ как $1/v$, сохраняя поток вероятности постоянным.

Можно проделать подобную процедуру и в полевом случае. Гамильтониан в этом случае имеет вид, согласно (10)

$$H = \int p(\mathbf{r}) \left[\frac{\chi T_\infty^2}{nc_p} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi \nabla^2 T + U(T_c - T) \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} \right] d^3 r \quad (15)$$

с уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\chi T_\infty^2}{nc_p} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi \nabla^2 T + U(T_c - T) \frac{T - T_c}{\tau_{ph}}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\chi \nabla^2 p - \frac{p}{\tau_{ph}} U(T_c - T). \quad (17)$$

Здесь $p = \delta S/\delta T(\mathbf{r})$. Уравнения (16), (17) определяют критическую флуктуацию и могут быть приведены к безразмерным переменным путем замен $\xi = r/\sqrt{\chi\tau_{ph}}$, $\tau = t/\tau_{ph}$,

$$\Theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c}, \quad p = \frac{nc_p(T_\infty - T_c)\Pi}{T_\infty^2},$$

где Θ, Π – новые безразмерные поля. Безразмерные уравнения при этом имеют вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta + \Theta U(-\Theta) + 2\nabla^2 \Pi, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = -\nabla^2 \Pi - \Pi U(-\Theta). \quad (19)$$

Решение должно быть найдено, исходя из условий $\Pi_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, $\Pi_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$, $\Theta_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 1$, $\Theta_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, и проходить через окрестность $\partial \Theta/\partial \tau \approx 0$, $\Pi \approx 0$ при $\tau \rightarrow \tau^*$, после чего $\partial \Theta/\partial \tau \approx \nabla^2 \Theta + \Theta U(-\Theta)$ и флуктуация развивается путем охлаждения, а случайными потоками можно пренебречь. Поскольку $H = 0$, то действие

$$S = \int p \frac{\partial T}{\partial t} d^3 r dt \approx \int_{-\infty}^{\tau^*} \frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2 \Pi}{T_\infty^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3 d\tau d^3 \xi = s_0 \frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2}{T_\infty^2} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3. \quad (20)$$

Отрицательная постоянная s_0 может быть определена численным решением (18), (19) и является универсальным числом, дающим наибольшее действие S_0 , и не зависит от значений физических постоянных и разности $T_\infty - T_c$.

Для оценки скорости изменения температуры можно взять

$$|v_{\max}| = \frac{T_\infty - T_c}{\tau_{ph}} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3 n,$$

тогда для потока вероятности в переходной области, согласно (14),

$$j \sim \frac{T_\infty (n (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3)^{1/2}}{\tau_{ph} c_p} e^{S_0} \nu.$$

Оценка постоянной ν не может быть получена из теории гидродинамических флуктуаций [11]. Эта величина дает число равновесных малых флуктуаций с $\delta T \ll T$ на атомных масштабах в единице объема. В качестве оценки можно использовать $\nu = n/T_\infty$.

Таким образом, число критических флуктуаций, образующихся в единицу времени в единице объема,

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{n(n(\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3)^{1/2}}{\tau_{ph}c_p} \exp(s_0 \frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2}{T_\infty^2} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3).$$

Таким образом зародыши новой фазы интенсивно образуются по мере приближения T_∞ к T_c и быстро разрастаются. Мы рассматривали первоначальную фазу роста критической флуктуации и ограничились теплопередачей только посредством теплопроводности, пренебрегая эффектами сверхтекучести на этой стадии. Это приближение может быть оправдано тем, что большую часть вклада в действие дает область, далекая от области малых скоростей v , где $p(\mathbf{r}) = \delta S/\delta T(\mathbf{r})$ становится малым и можно пренебречь флуктуационным вкладом, полагая $W \sim v^{-1}e^{S_0}$.

Рассмотрение дальнейшего роста инстантона требует решений уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, так как образуется сверхтекучая сердцевина развивающейся флуктуации. Мы качественно рассмотрим возникающие при этом явления. Исходя из предположения о большой величине τ_{ph} , будем считать, что в этой области движение квазистационарно, подстраиваясь под медленный процесс охлаждения фононами. Воспользуемся уравнениями гидродинамики сверхтекучей жидкости вблизи точки перехода в форме, предложенной Халатниковым [12]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu + \mu_s \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s v_s^i + \rho_n v_n^i) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho_n v_n^i v_n^k + \rho_s v_s^i v_s^k + P \delta^{ik}) = 0,$$

$$T \frac{\partial n \sigma}{\partial t} + T \text{div} n \sigma \mathbf{v}_n =$$

$$= \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right]^2 \rho_s - \frac{\rho_s c_p T}{m \tau_{ph}},$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div} \rho_s \mathbf{v}_s = -\frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right] \rho_s.$$

Здесь σ – энтропия на одну частицу, n – число частиц на единицу объема, ρ – плотность. Индексы n, s относятся к нормальной и сверхтекучей компонентам, постоянная Λ является релаксационным параметром, и мы добавили унос энергии путем излучения фононов

в уравнение для энтропии. Здесь μ_s – специфический химпотенциал для сверхтекучей плотности, который должен обеспечивать равновесную плотность конденсата, получаемую путем приравнивания релаксационной правой части уравнения для ρ_s к нулю. В нашей модели слабонеидеального бозе-газа можно феноменологически определить

$$\mu_s = -\frac{\hbar^2 a_0}{m^2} [(n - n(T))] + \frac{\hbar^2 a_0}{m^3} \rho_s,$$

так, чтобы в равновесии $\rho_s = m(n - n(T)) = m\delta n$. Здесь $n(T)$ – число надконденсатных частиц. Мы будем считать, что величина $\Lambda m/\hbar$ достаточно велика и $T_c - T$ достаточно велико, чтобы выполнялось приближение $\mu_s + v_s^2/2 \approx 0$, пренебрегая величиной v_n по сравнению с v_s , что дает

$$\frac{\rho_s}{m} = \delta n - \frac{v_s^2 m^2}{2\hbar^2 a_0} = \delta n \left(1 - \frac{v_s^2 m^2}{2\hbar^2 a_0 \delta n} \right). \quad (21)$$

В этом случае из уравнений гидродинамики следует, что $\mu \approx \mu(p, T) = \text{const}$:

$$T \frac{\partial n \sigma}{\partial t} + T \text{div} n \sigma \mathbf{v}_n = -\frac{c_p T \rho_s}{m \tau_{ph}}.$$

Ввиду малости величины v_s по сравнению со скоростью звука, а также малостью ρ_s мы будем пренебрегать поправками к давлению $P \approx P_0$. В этом случае существенно только уравнение для энтропии. Считая производную $\partial n \sigma / \partial t$ малой, согласно предположению о квазистационарности (малая скорость изменения температуры $\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau_{ph}} \frac{1}{\sqrt{n_0(\chi\tau_{ph})^{3/2}}}$) мы должны приближенно иметь выполнение стационарного режима $\text{div} n \sigma \mathbf{v}_n = -c_p \rho_s / m \tau_{ph}$, и поток массы должен быть равен нулю $\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n = 0$. Учитывая $\rho_n \approx \rho$, получаем уравнение

$$-\sigma \text{div} \rho_s \mathbf{v}_s = -\frac{c_p \rho_s}{\tau_{ph}},$$

где σ – энтропия на одну частицу. Это уравнение определяет теплопередачу в сверхтекучем ядре флуктуации. Используя уравнение (21), имеем

$$\sigma \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(1 - \frac{v_s^2}{u^2} \right) v_s - \left(1 - \frac{v_s^2}{u^2} \right) \frac{c_p}{\tau_{ph}} = 0, \quad u^2 = \frac{2\hbar^2 a_0 \delta n}{m^2}.$$

Вводя безразмерное расстояние $\xi = c_p r / \sigma \tau_{ph}$, получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{(1 - v^2)(1 - \frac{2}{\xi} v)}{1 - 3v^2}. \quad (22)$$

Особые точки этого дифференциального уравнения

$$\xi = 0, v = 0 \text{ и } \xi = \frac{2}{\sqrt{3}}, v = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

причем последняя является фокусом с собственными числами $\lambda = 1 \pm i\sqrt{5}$. Так как скорость v должна обращаться в нуль при $\xi = 0$, то при малых ξ скорость $v \approx \frac{1}{3}\xi$ и растет быстрее, чем линейно, причем производная $d\xi/dv$ обращается в нуль при $v = 1/\sqrt{3}$ и некотором $\xi = \xi^*$, после чего становится отрицательной с дальнейшим ростом v . Таким образом, регулярное сверхтекучее движение не продолжается за точку ξ^* (постоянная порядка единицы и может быть найдена численно). Физическая длина

$$r^* \sim \frac{\sigma u \tau_{ph}}{c_p} = \frac{\sigma}{c_p} \sqrt{2 \frac{\delta n}{n} \eta^{1/3} \frac{\tau_{ph}}{\tau_{tr}}} \sqrt{\chi \tau_{ph}}$$

может быть меньше, чем $\sqrt{\chi \tau_{ph}}$; отметим также, что $1 - v^2 > 0$, то есть особенность возникает в сверхтекучем ядре. Найденная особенность показывает, что при $\xi \gtrsim \xi^*$ условия квазистационарности будут нарушены и должно возникать сложное нестационарное сверхтекучее движение с интенсивным образованием вихрей внутри инстантона с переходом в нормальную жидкость при $T > T_c$. Похожие явления возникают в сверхтекучей жидкости в поле тяжести, когда T_c зависит от одной из координат (вертикальной) и имеется фиксированный поток тепла из сверхтекучей жидкости в нормальную [13]. У нас имеется аналогичная ситуация, возникающая из-за неоднородного процесса охлаждения по мере приближения к критической температуре внутри сверхтекучего зародыша. Численные расчеты [14] и экспериментальные данные [15, 16] показывают возникновение “вихревой” сверхтекучей фазы с большой, но конечной теплопроводностью, без сверхтекучего переноса. В настоящее время механизм возникновения вихрей и вихревая фаза подобного рода недостаточно изучены как теоретически, так и экспериментально.

Таким образом, мы показали, что, в отличие от работы [7], переход в сверхтекучую фазу может происходить путем независимого роста критических флуктуаций-инстантонов при температурах выше критической $T > T_c$, непосредственно в процессе внешнего охлаждения. Эти флуктуации затем перерастают в макроскопические образования. При росте зародышей сверхтекучего состояния будут генерироваться вихри в его внешней части. Поэтому вихревые дефекты возникают как из-за независимого рождения зародышей с произвольной фазой при охлаждении (гипотеза Зельдовича–Киббла), так и непосредственно в процессе роста каждого сверхтекучего зародыша. Этот механизм рождения вихрей в процессе

роста инстантона существенно отличается от найденного в работе [17], где предполагалось существование сверхтекучего течения, взаимодействующего с нагретыми нормальными областями. Работа [17] связана с попыткой объяснения результатов эксперимента [18], где производилось облучение ${}^3\text{He}$ нейтронами, которое вызывало появление областей, нагретых выше T_c ; нагретые области охлаждались окружающим сверхтекучим ${}^3\text{He}$, и регистрировалось образование вихрей. Таким образом, происходило неоднородное охлаждение, что сильно отличается от модели, принятой в настоящей работе. В рассмотренной нами критической флуктуации происходит ее нагревание за счет несверхтекучего окружения, поэтому флуктуации выгодно сохранять сферическую симметрию для уменьшения этого нагревания. В случае охлаждения нагретой области с сверхтекучим окружением [18], по-видимому, граница раздела фаз должна быть неустойчива относительно искажений ее формы, так как это приводит к более быстрому охлаждению. Однако требуется тщательное исследование как устойчивости, так и самого механизма фазового перехода в таких условиях, не связанных, в отличие от [17], с существованием внешнего сверхтекучего движения.

Настоящая работа поддержана грантом президента РФ # НШ-1715.2003.3 для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, программой президиума РАН “Квантовая Макрофизика” и госконтрактом # 40.020.1.1.1165 Минпромнауки РФ.

Авторы выражают благодарность В. В. Лебедеву за полезные обсуждения.

1. R. Becker and W. Doering, *Ann. der Physik* **24**, 719 (1935).
2. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **112**, 525 (1942).
3. J. S. Langer, *Ann. of Physics* **54** 258 (1962).
4. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **42**, 1354 (1962).
5. Я. Б. Зельдович, И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь. *ЖЭТФ* **67**, 3 (1974).
6. T. W. Kibble, *J. Phys.* **A9**, 1387 (1976).
7. W. H. Zurek, *Cosmological experiments in condensed matter system*, *Physics Reports* 1996, p. 177-221.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, т. 5, М.: Физматлит, 2002.
9. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, т. 9 М.: Физматлит, 2002, ч. 2. гл. 9.
10. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика*, М.: Физматлит, 2001.
11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, т. X, М.: Наука, 1979.

12. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, М.: Наука 1971, гл. 9.
13. Akira Onuki, *J. Low Temp. Physics* **50**, 433 (1982).
14. P. B. Weinman and J. Miller, *J. Low Temp. Physics* **119**, 155 (2000).
15. Feng Chuan Lui and Guenter Ahlers, *PRL* **76**, 8, 1300 (1996).
16. H. Baddar, G. Ahlers, K. Kuehn, and H. Fu, *J. Low Temp. Physics* **119**, 1 (2000).
17. I. S. Aranson, N. B. Kopnin, and V. M. Vinokur, *PRL* **83**, 2000 (1999)
18. V. H. M. Ruutu, V. B. Eltsov, A. J. Gill et al., *Nature* **382**, 334 (1996).