Письма в ЖЭТФ, том 77, вып. 11, с. 743 – 746

Холловская проводимость минизон, лежащих на крыльях уровней Ландау

Й. Брюнинг[1)], *С. Ю. Доброхотов*[2)], *В. А. Гейлер*[3)], *К. В. Панкрашкин*[4)]

Faculty of Natural Sciences and Mathematics II, Humboldt-University of Berlin, Berlin 12489 Germany

Поступила в редакцию 5 мая 2003 г.

В рамках квазиклассического подхода предложен метод описания структуры энергетического спектра двумерного магнитно-блоховского электрона, при этом не требуется малость периодического потенциала по сравнению с циклотронной энергией. С помощью этого метода каждая зона Ландау описывается как спектр соответствующего ей одномерного оператора типа Харпера и представляет собой серию минизон, причем минизоны, лежащие по краям зон, плоские с точностью до экспоненциально малых поправок. Показано, что не зависимо от формы потенциала все такие минизоны не дают вклада в квантованную холловскую проводимость.

PACS: 03.65.Sq, 73.43.–f

Стандартные теории целочисленного квантового эффекта Холла показывают, что каждый полностью заполненный уровень Ландау дает вклад в холловскую проводимость, равный кванту e^2/h [1], так что при движении уровня Ферми вверх по энергетической оси холловская проводимость монотонно возрастает, испытывая экспериментально обнаруженные К. фон Клитцингом скачки, равные e^2/h. При наложении слабого периодического потенциала V каждый уровень Ландау расплывается в зону, ширина которой не превосходит $2\max|V|$; при этом каждая зона распадается, в свою очередь, на магнитные подзоны. Если число квантов $\Phi_0 = hc/|e|$ магнитного потока Φ через элементарную ячейку периодов потенциала V рационально и представимо в виде несократимой дроби $\Phi/\Phi_0 = N/M$, то каждая зона Ландау разбивается на N подзон [2]. Это приводит к тому, что диаграмма "поток – энергия" для спектра периодического оператора Ландау имеет сложную фрактальную структуру, предсказанную Азбелем и построенную численно в приближении, описываемом уравнением Харпера, [3] (бабочка Хофштадтера). Из хорошо известных калибровочных аргументов Р. Лафлина вытекает, что каждая подзона несет целое число квантов проводимости, которое меняется весьма нерегулярным образом при переходе от одной подзоны к другой, подчиняясь некоторому диофантову уравнению [1] (это число есть в точности число Чженя соответствующего расслоения магнитно-блоховских функций [4]). Тем самым, при наличии периодического потенциала и в полях, для которых Φ/Φ_0 достигает величины порядка единицы, зависимость холловской проводимости от энергии Ферми теряет монотонный характер и испытывает, вообще говоря, иррегулярные скачки, величина которых по-прежнему есть целое кратное e^2/h. Эти скачки были обнаружены недавно К. фон Клитцингом и др. [5] (в полном соответствии с предсказаниями теории [1]) при измерении магнитосопротивления двумерного электронного газа в квадратной сверхрешетке с ячейкой размером ~ 100 нм; отметим, что идея такого эксперимента была предложена еще в [3].

В упомянутой работе К. фон Клитцинга и др. $V \simeq \simeq 0.6$ мэВ, поэтому в этом эксперименте можно было не учитывать возможность наложения или частичного перекрытия зон Ландау, однако при увеличении потенциала V таким эффектом пренебречь уже нельзя. Как показано численно в [6], при значениях V сравнимых с циклотронной энергией $\hbar\omega_c$ происходит перекрытие зон Ландау, а при дальнейшем увеличении V – перегруппировка зон. Важно отметить, что нескольким нижним зонам, возникшим после кроссовера, соответствует нулевое число Чженя, то есть эти зоны не несут холловской проводимости [6]. Более подробный численный анализ влияния перекрытия зон Ландау на холловское сопротивление был дан в [7]. При этом надо принимать во внимание, что форма диаграммы "поток – энергия" для периодического оператора Ландау сильно отличается от идеальной самоподобной формы бабочки Хофштадтера [8]. Кро-

---

[1)] J. Brüning

[2)] Постоянный адрес: Институт проблем механики РАН, 119526 Москва, Россия.

[3)] Постоянный адрес: Лаборатория математической физики, Мордовский государственный университет, Саранск 430000 Россия, e-mail: geyler@mrsu.ru

[4)] e-mail: const@mathematik.hu-berlin.de ме того, на холловскую проводимость подзон влияет и форма потенциала, в частности, отсутствие у него центра инверсии [9].

В настоящей статье предложен подход к квазиклассическому описанию зон Ландау, не зависящий от формы потенциала и от перекрытия зон. Требуется лишь малость двух параметров: $\varepsilon_B = (l_M/L)^2$, где l_M – магнитная длина, а L – характерный размер решетки периодов потенциала V, а также параметра $\varepsilon_V = \varepsilon_B \max|V|/\hbar\omega_c$. При этом отношение $\max|V|/\hbar\omega_c$ не обязательно должно быть мало, так что предлагаемый подход позволяет рассматривать режим, при котором происходит перегруппировка зон Ландау [6]. В типичных ситуациях оценки параметров ε_B и ε_V таковы: если $B \simeq 10$ Тл, то $l_M \simeq \simeq 10$ нм; для периодических массивов квантовых точек или антиточек $L \simeq 100 - 500$ нм. Отсюда $\varepsilon_B \sim \sim 10^{-3}$; с учетом эффективной массы электрона в GaAs $m = 0.067 m_e$ имеем оценку $\hbar\omega_c \simeq 15$ мэВ, поэтому для $V \lesssim 15$ мэВ имеем $\varepsilon_V \lesssim \varepsilon_B$. В рамках предложенного подхода мы показываем, что не зависимо от формы потенциала все минизоны, лежащие на крыльях каждого уровня Ландау (а не только нижние подзоны спектра), не дают вклада в квантованную холловскую проводимость. Таким образом, при учете влияния перекрытия зон Ландау на квантование холловской проводимости нужно принимать во внимание лишь перекрытие достаточно узких центральных участков расплывшегося уровня Ландау.

Гамильтониан магнитно-блоховского электрона будем рассматривать в калибровке Ландау

$$\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\left((-i\partial_1 + (eB/c\hbar)x_2)^2 - \partial_2^2\right) + V(x_1, x_2),$$

где потенциал V имеет решетку периодов Λ с базисом $\mathbf{a}_1 = (L, 0)$ и $\mathbf{a}_2$. Переходя к безразмерным координатам $\mathbf{X} = \mathbf{x}/L$ и потенциалу $v = V/\max|V|$, представим $\widehat{H}$ в виде $\widehat{H} = mL^2\omega_c^2\widehat{H}^0$, где

$$\widehat{H}^0 = \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{P}_1 + X_2\right)^2 + \widehat{P}_2^2\right] + \varepsilon_V v(X_1, X_2).$$

Здесь $\widehat{P}_j = -i\varepsilon_B\partial/\partial X_j$.

Использование теории возмущений по малому параметру ε_V может дать только грубую спектральную информацию, кроме того, оно требует дополнительных предположений о соотношении между ε_B и ε_V, поскольку параметр ε_B также мал. Тем не менее, именно малость ε_B позволяет описать тонкую структуру уровней Ландау, используя квазиклассический подход.

Так как на плоскости (X_1, X_2) траектории классической системы с невозмущенным гамильтонианом $\frac{1}{2}\left((P_1+X_2)^2+P_2^2\right)$ представляют собой циклотронные орбиты радиусом $\sqrt{2I}$ с центром (y_1, y_2), то удобно перейти к новым каноническим переменным, именно к обобщенным импульсам I, y_1 (или p, y_1) и обобщенным координатам φ, y_2 (или q, y_2) в соответствии с формулами

$$X_1 = q + y_1, \quad P_1 = -y_2, \quad X_2 = p + y_2, \quad P_2 = -q,$$
$$p = \sqrt{2I}\cos\varphi, \quad q = \sqrt{2I}\sin\varphi$$

(здесь φ – угловая координата на орбите). В этих переменных соответствующий классический гамильтониан H^0 принимает вид

$$H^0 = I + \varepsilon_V v(\sqrt{2I}\sin\varphi + y_1, \sqrt{2I}\cos\varphi + y_2).$$

Усредняя H_0 по углу, мы описываем дрейф центра циклотронной орбиты усредненным гамильтонианом

$$\mathcal{H}^{\mathrm{av}}(I, y_1, y_2; \varepsilon_V) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H^0\, d\varphi =$$
$$= I + \varepsilon_V J_0(\sqrt{-2I\Delta})v(y_1, y_2), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2},$$

(J_0 – функция Бесселя нулевого порядка). Далее, можно показать, что существует каноническая замена переменных $(p', q', \mathbf{y}') = (p, q, \mathbf{y}) + O(\varepsilon_V)$ такая, что

$$H^0(p, q, \mathbf{y}; \varepsilon_V) = \mathcal{H}^{\mathrm{av}}\left(\frac{1}{2}(p'^2 + q'^2), \mathbf{y}'; \varepsilon_V\right) + O(\varepsilon_V^2),$$

но оценка остатка $O(\varepsilon_V^2)$ в этой формуле недостаточна для описания тонкой структуры спектра оператора H^0. Однако, как показано в [10], итерацией этой процедуры можно получить каноническую замену переменных вида $(P, Q, \mathbf{Y}) = (p, q, \mathbf{y}) + O(\varepsilon_V)$, приводящую гамильтониан H^0 к виду $H^0(p, q, \mathbf{y}; \varepsilon_V) = = \mathcal{H}^0(\frac{1}{2}(P^2 + Q^2), Y_1, Y_2; \varepsilon_V) + O(e^{-C/\varepsilon_V})$ с периодической по переменным Y_j правой частью и положительной константой C.

Квантование $\mathcal{H}^0$ приводит к оператору $\widehat{\mathcal{H}}^0$, при этом квазиклассические спектры $\widehat{H}^0$ и $\widehat{\mathcal{H}}^0$ совпадают с точностью $O((\varepsilon_B + \varepsilon_V)^\nu)$ для произвольного ν. Так как операторы $\widehat{P} = -i\varepsilon_B\partial/\partial Q$ и $\widehat{Q} = Q$ коммутируют с $\widehat{Y}_1 = -i\varepsilon_B\partial/\partial Y_2$ и $\widehat{Y}_2 = Y_2$, то $\widehat{\mathcal{H}}^0$ коммутирует с гамильтонианом гармонического осциллятора $\frac{1}{2}(\widehat{P}^2 + + \widehat{Q}^2)$. Тем самым собственные функции Ψ оператора $\widehat{\mathcal{H}}^0$ можно искать в виде $\Psi(Q, Y_2) = \psi_n(Q)\varphi_n(Y_2)$, где ψ_n – осцилляторные функции уровня $E_n = (n + +1/2)\varepsilon_B$, $n = 0, 1, \ldots$, а φ_n удовлетворяет уравнению

$$\widehat{\mathcal{H}}_n\varphi_n = E\varphi_n. \tag{1}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{H}}_n$ получается из классического гамильтониана $\mathcal{H}_n(Y_1, Y_2) = \mathcal{H}^0(E_n, Y_1, Y_2, \varepsilon_V)$ квантованием $\widehat{Y}_1 = -i\varepsilon_B \partial/\partial Y_2$ (полученные операторы принято называть операторами типа Харпера). Так как $mL^2\omega_c^2\varepsilon_B = \hbar\omega_c$, то число E_n – в точности n-й уровень Ландау. Следовательно, спектр оператора $\widehat{\mathcal{H}}_n$ описывает расплывание n-го уровня Ландау в зону под действием периодического потенциала V. Таким образом, в нашем подходе каждая зона Ландау описывается уравнением (1), тем самым в рамках квазиклассики исходная спектральная задача сводится к семейству одномерных спектральных задач, что позволяет иметь дело только с интегрируемыми гамильтонианами.

Воспользуемся теперь квазиклассическим анализом спектра операторов типа Харпера, проведенным в [11]. По краям спектра оператора $\widehat{\mathcal{H}}_n$ лежат минизоны, экспоненциально узкие по параметру ε_B. Соответствующие им магнитно-блоховские собственные функции оператора $\widehat{H}^0$ в случае рационального потока Φ/Φ_0 построены в [10]. А именно, обозначая $\Phi/\Phi_0 = N/M$ и укрупняя решетку Λ (то есть переходя к решетке с базисом $M\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ [4]), в координатах $\mathbf{X}$ получаем следующие квазиклассические собственные функции, удовлетворяющие магнитно-блоховским периодическим условиям с квазиимпульсом $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{X},\mathbf{k}) = \textstyle\sum_{l_1,l_2\in\mathbb{Z}} & e^{2\pi i(k_1 l_1 - k_2 l_2) - iNl_2L_{21}/2} \times \\ & \times \psi(\mathbf{X} - Ml_1\mathbf{L}_1 - l_2\mathbf{L}_2)e^{-iNl_2X_1},\end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{L}_1 = (1,0)$ и $\mathbf{L}_2 = (L_{21}, L_{22})$ – периоды нормированного потенциала v, а ψ – некоторая локализованная функция, являющаяся квазимодой оператора $\widehat{H}$ [12]. Из формулы (2) непосредственно следует, что расслоение магнитно-блоховских функций, соответствующих данной экспоненциально узкой минизоне, тривиально и поэтому имеет нулевой класс Чженя. Согласно стандартной теории квантового эффекта Холла [1], это означает, что холловская проводимость, отвечающая рассматриваемой минизоне, равна нулю. Таким образом, после прохождения уровня Ферми через минизоны на крыльях уровня Ландау квантованное значение холловской проводимости не меняется. Что касается минизон в середине зон Ландау, то явное нахождение соответствующего вклада в холловскую проводимость требует дополнительных вычислений, которые удобно проводить с помощью формулы Усова [13]. Эти вычисления уже зависят от конкретного вида потенциала V и проводились, например, в [9]. Простейшие примеры здесь показывают немонотонную зависимость от положения уровня Ферми в согласии с [1].

Таким образом, предложен квазиклассический подход, основанный на редукции задачи описания спектра магнитно-блоховского электрона к серии одномерных задач. При таком подходе каждая зона Ландау (расплывшийся уровень Ландау) совпадает со спектром некоторого одномерного оператора типа Харпера, получаемого квантованием классического гамильтониана на торе, зависящего от номера уровня. На крыльях зоны Ландау лежат экспоненциально узкие минизоны, отвечающие им квазиклассические магнитно-блоховские функции образуют расслоения с нулевым классом Чженя. Тем самым указанные минизоны не дают вклада в квантованную холловскую проводимость, и ими можно пренебречь при учете влияния перекрытия зон Ландау на картину холловского квантования. Важно подчеркнуть, что изложенный здесь метод применим и в том случае, когда величина потенциала решетки V сравнима с циклотронной энергией; в случае же $|V| \ll \hbar\omega_c$ полученные результаты согласуются с результатами [14]. Интересно отметить, что расслоение магнитно-блоховских функций экспоненциально узких (то есть плоских с точностью до экспоненциально малых поправок по полю) минизон имеет такую же структуру, как и расслоение собственных функций фермионов на решетке в присутствии магнитного поля [15].

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований, INTAS и DFG.

---

1. D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982); P. Streda, J. Phys. **C15**, L717 (1982).
2. J. Zak, Phys. Rev. **134**, A1602 (1964).
3. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **46**, 929 (1964); D. R. Hofstadter, Phys. Rev. **B14**, 2239 (1976).
4. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ЖЭТФ **79**, 1006 (1980).
5. C. Albrecht, J. H. Smet, K. von Klitzing et al., Phys. Rev. Lett. **86**,147 (2001).
6. Z. Tešanović and F. Axel, B. I. Halperin, Phys. Rev. **39**, 8525 (1989).
7. D. Springsguth, R. Ketzmerick, and T. Geisel, Phys. Rev. **B56**, 2036 (1997).
8. G. Petschel and T. Geisel, Phys. Rev. Lett. **71**, 329 (1993); O. Kühn, V. Fessatidis, H. L. Cui et al., Phys. Rev. **B47**, 13019 (1993); S. A. Gredeskul, M. Zusman, Y. Avishai, and M. Ya. Azbel, Phys. Rep. **288**, 223 (1997); V. A. Geyler, I. Yu. Popov, A. V. Popov, and A. A. Ovechkina, Chaos, Solitons, and Fractals **26**, 251 (2000).
9. В. Я. Демиховский, А. А. Перов, Письма в ЖЭТФ **76**, 723 (2002); V. Ya. Demikhovskii and D. V. Khomitsky, Phys. Rev. **B67**, 035321 (2003).

10. Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, ДАН **379**, 131 (2001); J. Brüning, S. Yu. Dobrokhotov, and K. V. Pankrashkin, Russian J. Math. Phys. **9**, 14 (2002); Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, К. В. Панкрашкин, ТМФ **131**, 304 (2002).
11. F. Faure, J. Phys. **A33**, 531 (2000).
12. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики,* М.: Наука, 1976.
13. Н. А. Усов, ЖЭТФ **94**, 305 (1988).
14. Г. В. Мильников, И. М. Соколов, Письма в ЖЭТФ **48**, 497 (1988).
15. А. Ф. Белов, Ю. Е. Лозовик, В. А. Мандельштам, Письма в ЖЭТФ **51**, 422 (1990); Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. **73**, 1134 (1994); В. А. Гейлер, И. Ю. Попов, Письма в ЖЭТФ **63**, 367 (1996).