Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.6, стр.466 - 470 © 1994г. 25 сентября

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОЛИТОНОВ

Е.А.Кузнецов, А.В.Михайлов

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН,

117940 Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 августа 1994 г.

Рассмотрена задача о релаксации возмущенного (усиленного) оптического солитона. Нелинейная интерференция солитона и поля излучения приводит к затухающим степенным образом колебаниям амплитуды солитона. Обнаружен новый эффект взаимного притяжения солитонов благодаря их взаимодействию с несолитонной частью.

1. В настоящее время разрабатывается несколько вариантов длинных световолоконных линий связи, где в качестве бита информации используются солитоны. Оптические солитоны хорошо описываются с помощью нелинейного уравнения Шредингера [1, 2]:

$$iE_z + E_{tt} + 2|E|^2 E = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) записано в безразмерных переменных в системе координат, двигающейся с групповой скоростью. Для компенсации линейного затухания используются усилители (см., например, [3, 4]), действие которых сводится по существу к простому умножению входного сигнала на коэффициент усиления γ. Так, например, форму одиночного солитона [5]

$$E(t,z) = \frac{E_0 e^{iE_0^2 z}}{\cosh E_0 t} \tag{2}$$

после прохождения усилителя ($z=0$) можно считать неизменной, а его амплитуда преобразуется к

$$E_1(z=0,t) = \frac{\gamma E_0}{\cosh E_0 t}\ . \tag{3}$$

Здесь γ лежит в интервале $1 \geq \gamma \geq 1,5$: при больших γ рождаются новые солитоны [6]. Если пренебречь затуханием, то после усилителя поведение электромагнитного поля определяется уравнением (1) с начальным условием (3). Усилитель нарушает соотношение между шириной и амплитудой солитона. В результате солитон релаксирует к новым согласованным значениям ширины и амплитуды:

$$\tilde{E}_0 = E_0(2\gamma - 1). \tag{4}$$

Как отмечалось в работе [6], процесс релаксации к новому состоянию имеет осцилляторный характер, амплитуда этих колебаний медленно затухает при больших z.

Данная работа посвящена изучению этих колебаний и нелинейного взаимодействия релаксирующих солитонов. Основной причиной релаксационных колебаний, как будет показано ниже, является нелинейная интерференция солитона и поля излучения. Процесс релаксации носит принципиально неадиабатический характер, а частота колебаний отличается от найденной вариационными методами [7]. Наиболее важным с нашей точки зрения эффектом является взаимное сближение солитонов благодаря их взаимодействию с полем излучения, которое не является экспоненциально малым.

2. Решение задачи Коши для (1), как известно [5], сводится к решению прямой и обратной задач рассеяния для линейного оператора:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = i(\lambda\sigma_3 + \hat{E})\psi \ , \tag{5}$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{E} = \begin{pmatrix} 0 & E^* \\ E & 0 \end{pmatrix} .$$

В отличие от солитонного решения (2), представляющего собой безотражательный потенциал $\hat{E}$, начальное условие (4) содержит помимо точки дискретного спектра $\lambda_0 = iE_0(\gamma - 1/2)$ компонент непрерывного спектра. Коэффициенты матрицы рассеяния $a(\lambda), b(\lambda)$ для спектральной задачи (5) имеют вид [6]:

$$a(\lambda) = \frac{\lambda - iE_0/2 - i\gamma E_0}{\lambda + E_0/2 + i\gamma E_0}\hat{a}(\lambda), \qquad b(\lambda) = i\sin\pi\gamma/\cosh(\frac{\pi\lambda}{E_0}) \ , \tag{6}$$

где функция

$$\hat{a}(\lambda) = \frac{(\Gamma(-i\lambda/E_0 + 1/2))^2}{\Gamma(-i\lambda/E_0 + \gamma - 1/2)\Gamma(-i\lambda/E_0 - \gamma + 3/2)}$$

аналитична и не имеет нулей в верхней полуплоскости λ.

Как известно [8], в отсутствии солитона несолитонная часть асимптотически при $z \to \infty$ расплывается дисперсионным образом:

$$E_1(z,t) = \frac{1}{z^{1/2}} f(\xi)\exp\{i\frac{t^2}{4z} + i\alpha(\xi)\ln z\} + 0(z^{-1/2}) \ , \tag{7}$$

где

$$\alpha(\xi) = 2|f(\xi)|^2, \ \ \xi = -\frac{t}{4z},$$

а $|f(\xi)|$ связан с коэффициентом $b(\lambda)$ формулой

$$|f(\xi)|^2 = -\frac{1}{4\pi}\ln(1 - |b(\xi)|^2). \tag{8}$$

Асимптотическая волновая функция, отвечающая (7), аналитическая в верхней полуплоскости спектрального параметра λ ($\mathrm{Im}\lambda > 0$) , согласно [9, 11] имеет вид:

$$\psi = \Phi\exp[i(\lambda t + 2\lambda^2 z)\sigma_3], \tag{9}$$

где Φ матрица 2×2 с компонентами:

$$\Phi_{11} = \exp\left[-i\int_{\xi}^{\infty}\frac{\alpha(\xi)}{\lambda - \xi}d\xi\right] \ , \tag{10}$$

$$\Phi_{21} = \frac{E_1}{2(\lambda - \xi)}\exp\left[-i\int_{\xi}^{\infty}\frac{\alpha(\xi)}{\lambda - \xi}d\xi\right] \ , \tag{11}$$

$$\Phi_{12} = \frac{-E_1^*}{2(\lambda - \xi)}\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\alpha(\xi)}{\lambda - \xi}d\xi\right] \ , \tag{12}$$

$$\Phi_{22} = \exp\left[-i\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\alpha(\xi)}{\lambda-\xi}d\xi\right] \quad . \tag{13}$$

Формулы (9 – 13) справедливы в области вдали от резонанса $\lambda = \xi$:

$$|\lambda - \xi| \gg |E(t,z)| \sim E_0 z^{-1/2} \quad .$$

Добавление дискретного спектра в точке $\lambda = \lambda_0$ при заданном непрерывном сводится, как известно [12, 13], к замене

$$\Phi \to \tilde{\Phi} = \chi\Phi \quad ,$$

где $\chi = 1 - \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}{\lambda - \lambda_0}P$. Здесь проектор P $(P^2 = P)$ определяется формулой

$$P = \frac{|n><n|}{<n|n>} \quad , \tag{14}$$

а вектор $|n>$ задается с помощью постоянного комплексного вектора $|n_0>$:

$$|n> = \psi(z,t,\lambda_0)|n_0> \quad .$$

Поле $E(z,t)$ при этом выражается через компоненту P_{21} :

$$E(z,t) = E_1(z,t) - 2(\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)P_{21} \quad . \tag{15}$$

Полагая вектор

$$|n_0> = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} \\ e^{-i\gamma} \end{pmatrix} \text{ и } \quad \lambda_0 = \zeta + i\eta \quad ,$$

из (15) с помощью формул (9 – 13) находим:

$$\begin{aligned} E(z,t) \quad = \quad & E_1(z,t) - 2i\eta e^{-i\Phi_2}\left(e^{i\varphi} + \frac{E_1(z,t)}{2}\left[\frac{e^{\theta}}{\lambda_0 - \xi} - \frac{e^{-\theta}}{\bar{\lambda}_0 - \xi}\right]\right) \\ & \left(\cosh(\theta - 2\eta\Delta) - \frac{|E_1(z,t)|\eta}{|\lambda_0 - \xi|^2}\sin(\Phi_1 + \Phi_2 - \varphi)\right)^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\theta = 2\eta(t + 4\zeta z) + 2\gamma'' \quad ,$$

$$\varphi = -2\zeta t + 4(\eta^2 - \zeta^2) - 2\gamma' \quad ,$$

$$\Phi_1 = \arg E_1 \quad ,$$

$$\Phi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi' - \xi)\frac{(\xi' - \zeta)\alpha(\xi')d\xi'}{|\xi' - \lambda_0|^2} \quad ,$$

$$\Delta(\xi) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi' - \xi)\frac{\alpha(\xi')d\xi'}{|\xi' - \lambda_0|^2} \quad .$$

Асимптотическое решение (16) уточняет результат работы [10], полученный при анализе законов сохранения. Важно отметить, что факторы $\Phi_2(\xi)$ и $\Delta(\xi)$ не могут быть найдены при этом подходе. Аналогичные вычисления были приведены в работе [11], однако в ответе были отброшены члены того же порядка ($\sim z^{-1/2}$), имеющие, как будет видно ниже, важное физическое значение.

3. Для начальных условий (3), симметричных относительно t, решение должно быть четным относительно t. Поэтому $\gamma'' = \zeta = 0$. При этом $E_1(z,t)$ и фаза $\Phi_2(\xi)$ являются четными функциями t, а $\Delta(\xi)$ – нечетной функцией. Входящая в (16) функция $\alpha(\xi)$ определяется соотношениями (6) и (8), а $\eta = E_0(\Gamma - 1/2)$.

Решение (16) представляет собой асимптотику задачи Коши при больших z, определенную с точностью до константы γ' и общей постоянной фазы (опущенной в (16)). Данное решение есть результат нелинейной суперпозиции солитона и излучения. Взаимодействие между двумя этими компонентами приводит к осцилляциям амплитуды солитона[1)], релаксирующим к равновесному значению $\tilde{E}_0 = E_0(2\Gamma - 1)$. Частота осцилляций $\Omega = \tilde{E}_0^2 - \alpha(0)/z$ асимптотически стремится к частоте вращения солитона, а амплитуда колебаний убывает как $z^{-1/2}$. Отметим, что данная интерференция является существенно нелинейной – амплитуда решения достигает максимума при противоположных фазах солитона и радиационного фона.

4. Рассмотрим два релаксирующих солитона ($\zeta_{1,2} = 0$), находящихся на расстоянии T ($TE_0 >> 1$). Ясно, что взаимодействие за счет перекрытия солитонов является экспоненциально малым. Главный эффект возникает благодаря взаимодействию солитона и несолитонной части, излученной другим солитоном (в этом случае взаимодействием волн, излученных релаксирующими солитонами, можно пренебречь – оно появляется в следующем порядке асимптотического разложения по $z^{-1/2}$). В результате солитоны сдвигаются навстречу друг к другу – их фазы изменяются. Для нахождения сдвигов центров солитонов достаточно воспользоваться решением (16), положив в нем $\gamma'' = -\eta T$. Приравнивая аргумент в гиперболическом косинусе нулю, для координаты центра $t(z)$ солитона получим уравнение:

$$t(z) = T - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(\xi + \frac{t(z)}{4z})\frac{\alpha(\xi)d\xi}{\xi^2+\eta^2} . \tag{17}$$

Дифференцируя это соотношение по z, для "скорости" центра солитона находим с нужной точностью:

$$v = \frac{dt}{dz} = -\frac{t}{4z^2}\frac{\alpha(-\frac{t}{4z})}{(\frac{t}{4z})^2+\eta^2} . \tag{18}$$

Если излучение находится слева от солитона ($T > 0$), то скорость солитона v отрицательна – два релаксирующих солитона приближаются друг к другу.

В случае $\eta T >> 1$ в правой части (19) можно приближенно заменить t на T. В результате полный сдвиг солитона находится простым интегрированием:

$$\Delta t = -\int_0^{\infty} \frac{\alpha(\xi)}{\xi^2+\eta^2}d\xi . \tag{19}$$

Для начального условия (3) функция $\alpha(\xi)$ является четной, в этом случае интеграл вычисляется явно:

$$\Delta t = \frac{1}{2\eta}\log|\hat{a}(i\eta)| = \frac{1}{E_0(2\gamma-1)}\log\left(\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(2\gamma-1)}\right) \tag{20}$$

1) Аналогичная интерференция имеет место для солитона на постоянном фоне $E_0 = A_0\exp(-2i|A_0|^2z)$ [14].

Авторы благодарят С.В.Манакова и А.Б.Шабата за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда Сороса (грант MLY000) и Гранта INTAS - 93 -139.

---

1. A.Hasegawa and F.Tappet, Appl.Phys.Lett. **23**, 142 (1973).
2. Y.Kodama, A.Maruta and A.Hasegawa, J. of European Optical Soc. B, Submitted (1994).
3. L.F.Mollenauer, R.H.Stolen and M.N.Islam, Opt.Lett. **10**, 229 (1985).
4. L.F.Mollenauer, E.Lichtman, M.J.Neubelt and G.T.Harvey, Electron.Lett., **29**, 910 (1993).
5. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971). (Soviet Phys. JETP **34**, 62 (1972)).
6. J.Satsuma and N.Yajima, Progr. Theor. Phys. Suppl. N 55, 284 (1974).
7. А.И.Маймистов, ЖЭТФ, **104**, 3620 (1993).
8. С.В.Манаков, ЖЭТФ **65**, 11392 (1973), (Sov.Phys.JETP **38**, 693 (1974)).
9. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, ЖЭТФ **71**, 203 (1976). (Sov.Phys.JETP **44**, 106 (1976)).
10. H.Segur, JMP **17**, 714 (1976).
11. В.Ю.Новокшенов, ДАН СССР **251**, 799 (1980).
12. В.Е.Захаров, А.В.Михайлов, ЖЭТФ **74**, 1953 (1978).
13. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, Теория солитонов, М.: Наука, 1980.
14. Е.А.Кузнецов, ДАН СССР **236**, 575 (1977).