Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 5, стр. 221 – 223 5 марта 1983 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НИТЕЙ ДИСКОТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В.Г.Каменский, Е.И.Кац

Исследована устойчивость цилиндрического образца дискотического жидкого кристалла. Найдено критическое значение радиуса, начиная с которого цилиндрическая форма является стабильной. При меньших радиусах определена максимально допустимая длина цилиндра.

В последние годы был достигнут значительный прогресс в исследовании свойств пленок смектических жидких кристаллов [1], связанный в первую очередь с освоением технологии получения тонких (до двух молекулярных слоев) и однородных свободных (без подложки) пленок. Аналогичное исследование дискотических жидких кристаллов сдерживается трудностями получения свободных тонких нитей. Так в работе [2] не удалось получить образцы, содержащие менее 400 молекулярных нитей. Ниже будет показано что эти трудности носят принципиальный характер, а также будет дана оценка возможных размеров образцов при характерных значениях параметров жидких кристаллов.

Задача об устойчивости жидкого цилиндра была решена Релеем [3] и несколько в более общей постановке Бором [4]. Было показано, что цилиндрический образец изотропной жидкости неустойчив относительно разбиения на куски длиной порядка десяти радиусов. Эта неустойчивость очевидным образом связана с поверхностным натяжением тем обстоятельством, что цилиндрическая форма не минимизирует поверхностную энергию. Важно отметить, что неустойчивость имеет место при любом радиусе жидкого цилиндра.

Для цилиндра, сделанного из дискотического жидкого кристалла, с осью совпадающей с направлением нитей, имеются уже два фактора, определяющих устойчивость. Во-первых, как и в случае изотропной жидкости, поверхностная энергия, минимизирующаяся при разрыве цилиндра. Во-вторых – энергия упругой деформации решетки жидких столбиков, которая препятствует уменьшению радиуса цилиндра.

Для получения оценки рассматриваемого эффекта мы будем использовать приближение изотропной упругости и вязкости, а также пренебрежем теплопроводностью. Уравнения гидродинамики для несжимаемого дискотического жидкого кристалла в форме цилиндра в этом приближении выглядят следующим образом [5, 6]

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - v_r = \gamma B \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right],$$

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial r} + B\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right] + \eta\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right)\right], \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right].$$

Здесь ось z цилиндрической системы координат выбрана вдоль оси цилиндра, v – скорость, u – вектор смещения решетки жидких столбиков, P – давление, ρ – плотность, η – эффективная вязкость (некоторая комбинация коэффициентов Лесли), B – изотропный упругий модуль решетки, γ – коэффициент просачивания, описывающий движение при фиксированной решетке.

Можно найти полное решение системы (1), используя разложение радиальных зависимостей по бесселевым функциям. Воспользуемся, однако тем обстоятельством, что цилиндр достаточно тонок, т. е. его длина L много больше радиуса R. Из первого уравнения системы (уравнения непрерывности) следует

$$v_z \sim v_r \frac{L}{R} >> v_r \ .$$

Пренебрегая, где это можно, радиальной компонентой скорости, а также изменением аксиальной компоненты скорости в радиальном направлении, ищем решение в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} v_z = \varphi_1(r) \\ v_r = \varphi_2(r) \\ u = \varphi_3(r) \\ P = \psi(r) \end{array}\right\} \times \ e^{iqz + \alpha t} \ . \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и решая систему, получим

$$\varphi_1 = \frac{2iC}{q}, \qquad \varphi_2 = Cr, \quad \varphi_3 = \frac{Cr}{\alpha}, \qquad \psi = -\frac{2(\alpha\rho + \eta q^2)C}{q^2} \ , \qquad (3)$$

где постоянная C определяется из граничных условий.

Граничными условиями в данном случае являются условия конечности и непрерывности на оси цилиндра, уже учтенные при написании (3), а также условия на тензор напряжений при $r = R$:

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{rr} = P - B\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = P_\sigma \ , \qquad (4)$$

где $P_\sigma = -\dfrac{\sigma}{R^2}\left(\xi + R^2\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)$,

σ – коэффициент поверхностного натяжения, ξ – смещение боковой поверхности цилиндра ($\partial\xi/\partial t = v_r$). Подстановка решения (3) в граничные условия (4) дает дисперсионное уравнение для α

$$\alpha^2 + \frac{\eta q^2 \alpha}{\rho} - \left[\frac{\sigma q^2}{2\rho R}(1 - q^2R^2) - \frac{Bq^2}{\rho}\right] = 0.$$

Неустойчивость (т. е. нарастающие возмущения) имеет место при $\alpha > 0$. Размер областей неустойчивости при заданном радиусе цилиндра определяется волновыми векторами q_{max}, при которых α максимально. Для малых вязкостей

$$L \sim \frac{2\pi}{q_{max}} = \frac{9{,}02R}{\sqrt{1 - 2BR/\sigma}} \ . \qquad (5)$$

В случае больших вязкостей $\eta >> \sqrt{\sigma R\rho/2}$, характерных для дискотиков,

$$L \sim 13\sqrt[4]{\frac{\eta^2 R^3}{4\rho\sigma}} \Big/ \sqrt{1 - \frac{2BR}{\sigma}} \ . \qquad (5')$$

Отметим, что при $2BR/\sigma > 1$ цилиндр дискотического жидкого кристалла вообще устойчив.

Оценим максимальную возможную длину нитей для образцов использованных в [2]. В этом случае

$$R \simeq 750Å, \quad B \sim 10^6\ \text{Эрг/см}^3, \quad \sigma \sim 10^2\ \text{Эрг/см}^2, \quad \rho \sim 1\text{г/см}^3, \quad \eta \sim 1\text{пуаз}$$

Подставляя эти значения в (5'), получим $L \sim 2\cdot 10^{-3}$ см, что согласуется с экспериментально найденным в [2] размером 20 мк.

Всюду выше мы пренебрегаем силой тяжести, что накладывает определенные ограничения на характерную длину $L < max\{\sigma/g, B/\rho g\} \sim (1 \div 10^3)$ см. Проведенные выше оценки показывают, что максимально достижимые длины нитей с запасом удовлетворяют этому неравенству.

В заключение авторы выражают благодарность И.Е.Дзялошинскому и Ю.М.Бруку за обсуждения.

Литература

1. *Young C.Y., Pindak R., Clark N.A., Neyer R.B.* Phys. Rev. Lett., 1978, **40**, 773.

2. *Van Winkle D.H., Clark N.A.* Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, 1407.

3. *Релей* Теория звука, М., 1955, т. II ., с. 333.

4. *Бор Н.* Избранные научные труды. М.: Наука, 1970, **1**, 7.

5. *Воловик Г.Е., Кац Е.И.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 240.

6. *Prost J., Clark N.A.* In "Proceedings of the International Conference on Liquid Crustals", ed. S. Chandrasekhar, Heyden, Philadelphia, 1980, p. 53.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 января 1983г.