Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 7, стр. 322 – 325 *5 апреля 1983 г.*

КВАНТОВОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

А.И.Ларкин, Ю.Н.Овчинников

Диссипативные процессы уменьшают вероятность квантового туннелирования. Исследована температурная зависимость вероятности распада метастабильного состояния.

При движении классической частицы в диссипативной среде возникает сила трения, пропорциональная скорости частицы. Интересно выяснить, как эта сила влияет на вероятность туннелирования такой частицы через квазиклассический барьер. Ранее [1] эта задача решалась для случая температуры равной нулю. В настоящей работе сделано обобщение на произвольные температуры. При достаточно высоких температурах квантовое туннелирование несущественно и барьер преодолевается классически, активационно. Вероятность прохождения W описывается формулой Аррениуса с энергией активации, вообще говоря, плавно зависящей от температуры. При низких температурах более вероятно туннелирование через барьер. Переход от одного режима к другому может быть как переходом первого рода, так и переходом второго рода. При температуре близкой к критической найден общий вид температурной зависимости времени жизни системы в метастабильном состоянии. Для произвольных температур найдено аналитическое решение для случая, когда вязкие силы много больше сил инерции, а потенциальный барьер имеет вид кубической параболы.

Будем считать, что в диссипативной системе можно выделить одну квазиклассическую координату q, которая взаимодействует с большим числом квантовых координат Q. Гамильтониан такой системы можно записать в виде

$$\hat{H} = p^2/2m + V(q, Q); \qquad V(q, Q) = V(q) + qQ + H(Q). \tag{1}$$

Затравочные потенциальная $V(q)$ и кинетическая энергии могут отсутствовать и возникать только за счет взаимодействия. Гамильтониан термостата $H(Q)$ для определенности будем представлять в виде совокупности большого числа гармонических осцилляторов. Многие результаты не зависят от этого предположения.

Вероятность туннелирования предполагается достаточно малой, так что система успевает прийти в тепловое равновесие пока координата q находится в классически доступной области с одной стороны барьера. Средняя вероятность перехода за время t в этом случае равна

$$W = Z^{-1} \sum_{i,f} |<\psi^f| \exp\left(-i \int_{t_i}^{t_f} dt \hat{H}\right) |\psi^i>|^2 \exp(-E_i/T); \quad Z = \sum_i \exp(-E_i/T). \quad (2)$$

Здесь ψ^f, ψ^i, E_i — волновые функции и энергии конечного f и начального i состояний. Причем их следует найти в нулевом приближении по прозрачности барьера. Выражение (2) можно записать в виде континуального интеграла по переменной q

$$W = \int Dq(t) Sp_Q \exp\left\{ i \int_{\tilde{C}} \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q,Q)\right] dt \right\}. \quad (3)$$

Здесь контур $\tilde{C}$ — ломаная, соединяющая точки $(t_i + i/2T,\ t_i,\ t_f,\ t_i,\ t_i - i/2T)$.

В этой работе мы ограничимся вычислением вероятности перехода с экспоненциальной точностью. Для этого необходимо найти экстремальную траекторию, движение по которой переводит систему из одного метастабильного состояния в другое.

При движении только по действительному времени такие траектории отсутствуют. Сдвинем вертикальный участок контура на мнимую ось, так что конечным точкам $t = \pm i/2T$ соответствует состояние системы в квазиклассической области с одной стороны барьера, а точке $t = 0$ — с другой стороны барьера. Начало отсчета времени выбрано между t_i и t_f. На экстремальной траектории координата q удовлетворяет условию

$$q(t + i\tau) = q(t - i\tau). \quad (4)$$

При вычислении Sp_Q возникают фононные функции Грина на контуре Келдыша [2]. При этом сокращаются диаграммы, в которых хотя бы один конец фононной функции Грина лежит на участке контура, параллельном вещественной оси. Такое сокращение связано со свойством симметрии (4) для координаты q и разными знаками у приращений времени на частях контура, параллельных вещественной оси. Участки контура, параллельные действительной оси, дают вклад в W только за счет отличия q от его экстремального значения. Это приводит к предэкспоненциальному множителю пропорциональному $t_f - t_i$. С экспоненциальной точностью после замены $t = -i\tau$ получим

$$W = \exp(-A); \quad A = \ln Sp_Q \exp\left\{ \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 + V(q,Q)\right]\right\}. \quad (5)$$

Функция $q(\tau)$ в формуле (5) определяется из условия экстремальности функционала A и удовлетворяет граничным условиям $q(1/2T) = q(-1/2T)$. Для достаточно высоких значений температуры экстремальное значение функционала A достигается на функции $q(\tau) = q_0 = \mathrm{const}$.

$$A_0 = F(q_0)/T, \quad (6)$$

где $F(q_0)$ — экстремальное значение свободной энергии как функции параметра q. При квантовомеханическом туннелировании

$$q(\tau) = q_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi T n\tau). \quad (7)$$

Если переход от классического режима к квантовомеханическому туннелированию является переходом второго рода, то вблизи температуры перехода T_0 коэффициенты a_n малы и действие A можно написать в виде

$$A = A_0 + \alpha a_1^2 + B a_1^4. \quad (8)$$

Точка перехода T_0 определяется из условия $\alpha(T_0)=0$. Мы предположили, что при понижении температуры впервые обращается в ноль коэффициент при a_1^2. Тогда вблизи T_0 коэффициенты $|a_{n\neq 1}| \ll |a_1|$.

Коэффициент a_1 находится из условия минимума выражения (7). Выше точки перехода $A=A_0$, а ниже

$$A - A_0 = -\alpha^2/4B = -(\alpha')^2 (T-T_0)^2/4B. \tag{9}$$

Для модели, описываемой гамильтонианом (1)

$$A[q(\tau)] = \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 + V(q) + \frac{1}{2}\int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau_1\, q(\tau) q(\tau_1) D(\tau-\tau_1)\right], \tag{10}$$

где $D(\tau)$ мацубаровская функция Грина

$$D(\tau) = T\sum_{\omega_n} D(\omega_n)\exp(-i\omega_n\tau);\quad D(\omega_n) = -\sum_k \frac{C_k^2}{\omega_k^2+\omega_n^2};\quad \omega_n = 2\pi Tn. \tag{11}$$

Подставляя в формулу (10) выражение (7) для функции $q(\tau)$ и разлагая его в ряд по степеням a_n, получим:

$$\alpha = \pi^2 Tm + V''/4T + (D_1 - D_0)/4T,$$
$$B = \frac{1}{64T}\frac{\partial^4 V}{\partial q^4} - \frac{(\partial^3 V/\partial^3 q)^2}{32 T V''}\left(1 + \frac{V''}{2(16\pi^2T^2m + V'' + D_2 - D_0)}\right) \tag{12}$$

производные от потенциала берутся в точке q_0. Если коэффициент B больше нуля, то переход в точке $T=T_0$ — второго рода. Как следует из формулы (12), кубический член в разложении потенциала по степеням $q-q_0$ способствует наступлению перехода второго рода. Осцилляторы с частотами ω_k, бо́льшими по сравнению с обратным временем туннелирования, приводят к перенормировке массы m и потенциала $V(q)$. Взаимодействие с низкочастотными фононами приводит к вязкости. Как следует из вывода уравнения Ланжевена в классически доступной области [3], коэффициент вязкости η связан с функцией Грина D при малых частотах соотношением

$$D(\omega_n) = D_0 + \eta|\omega_n|. \tag{13}$$

Выполняя перенормировку массы и потенциала в формуле (10) с учетом выражения (13), получим

$$A[q(\tau)] = \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left\{\frac{m^*}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 + V^*(q) + \frac{\eta}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \frac{(q(\tau)-q(\tau_1))^2}{(\tau_1-\tau)^2}\right\}. \tag{14}$$

В формуле (14) функция $q(\tau)$ продолжена периодическим образом $q(\tau+4/T) = q(\tau)$. При температуре $T=0$ выражение (14) совпадает с результатом, полученным в работе [1].

Рассмотрим интересный случай, когда $V^*(q)$ — кубическая парабола

$$V(q) = 3V_0(q/q_0)^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{q}{q_0}\right). \tag{15}$$

Кроме того, будем считать, что вязкость η велика: $(\eta q_0)^2 \gg 6m^* V_0$, так что первым членом в формуле (14) можно пренебречь. В этом предельном случае $q(\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{6V_0 q}{q_0^2}(1-q/q_0)+\frac{\eta}{\pi}\fint_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \frac{\partial q(\tau_1)}{\partial \tau_1}\frac{1}{\tau_1-\tau}=0\ . \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет вид (7), где

$$\begin{aligned} a_0 &= -q_0\ (1-T/T^*), \qquad a_n = 2q_0\, T/T^* \exp(-bn), \\ T^* &= 3V_0/\pi\eta q_0^2\ , \qquad \operatorname{cth} b = T^*/T\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя найденное значение $q(\tau)$ в формулу (14), получим

$$A=\frac{V_0}{T_0}\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(T/T_0)^2\right], \quad T_0=T^*\,(1-(6m^* V_0/\eta^2 q_0^2)). \tag{18}$$

В формуле (18) учтены члены первого порядка по m^*. При температуре $T=0$ полученное выражение совпадает с результатом работ [4, 5].

Полученные результаты относятся к случаю, когда система до туннелирования была в состоянии близком к тепловому равновесию. Использованный выше метод позволяет рассматривать процесс туннелирования также и в неравновесных системах.

Авторы благодарят С.В.Иорданского и Э.И.Рашба за обсуждение результатов.

Литература

1. *Calderia A.O., Leggett A.J.* Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, 211.
2. *Келдыш Л.В.* ЖЭТФ, 1964, **47**, 1515.
3. *Schmid A.* J. of Low Temp. Phys., 1982, **49**, 609.
4. *Larkin A. I., Ovchinnikov Yu. N.* To be published.
5. *Ovchinnikov Yu. N., Barone A.* To be published.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 февраля 1983 г.