Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.8, стр.563 - 568

АНТИКИРАЛЬНОСТЬ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТИВНО ДВУМЕРНЫХ ФРУСТРИРОВАННЫХ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ

А.А.Звягин

Физико-технический институт низких температур им.Б.И.Веркина НАН Украины
310164 Харьков, Украина

Поступила в редакцию 6 мая 1994 г.;
После переработки 6 сентября 1994 г.

Исследована точно решаемая двумерная квантовая спиновая модель. Показано, что элементарные возбуждения несут ненулевую спиновую киральность (топологический заряд), но только их пары с противоположной киральностью дают вклад в термодинамику, так что система всегда в антикиральном спиновом состоянии. Предполагается, что в отсутствие топологических членов в гамильтониане элементарные возбуждения рассмотренного квантового антиферромагнетика массивны.

К изучению квантовых антиферромагнетиков возобновился интерес в последние годы прежде всего вследствие гипотезы Андерсона [1] о связи поведения таких антиферромагнетиков с природой высокотемпературной сверхпроводимости. В связи с этим существенным является вопрос о том, имеют ли элементарные возбуждения в двумерных квантовых антиферромагнетиках щель в спектре, или нет. К сожалению, ответ на этот принципиальный вопрос строго не могут дать приближенные описания [2–6]. Поэтому имеет смысл исследовать квантовые спиновые модели, допускающие точные решения. В то же время, двумерные квантовые системы интересны и тем, что они допускают существование элементарных возбуждений – энионов, статистика которых промежуточна между бозе- и ферми-случаями [7]. Ряд авторов связывает эту особенность двумерных квантовых систем с поведением металлооксидов, см., например, [8]. В известной статье [9] авторы связали явление сверхпроводимости в сильно коррелированных электронных системах со спиновыми киральными состояниями, нарушающими T и P симметрии системы.

В настоящей статье представлено точное решение с помощью квантового метода обратной задачи рассеяния [10] задачи Шредингера для модельной эффективно двумерной квантовой спиновой системы, в которой имеет место нарушение T и P симметрий и показано, что возбуждения этой системы, аналогичные классическим инстантонным решениям (см. [11]), бесщелевые. Они несут ненулевую спиновую киральность, но лишь их пары с противоположной киральностью дают вклад в термодинамику, что позволяет назвать такие системы антикиральными.

Рассмотрим сперва простейший случай двух цепочек спина 1/2, в котором сохраняются основные свойства двумерного пространства. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_n \{8(\mathbf{s}_{1,n}\mathbf{s}_{2,n} + \mathbf{s}_{1,n}\mathbf{s}_{2,n+1}) + 4\theta^2(\mathbf{s}_{1,n}\mathbf{s}_{1,n+1} + \mathbf{s}_{2,n}\mathbf{s}_{2,n+1}) +$$

$$+8\theta\epsilon^{ikl}(s^i_{1,n} - s^i_{2,n+1})s^k_{1,n+1}s^l_{2,n}\} - E_f, \qquad (1)$$

где $s^i_{1,2,n}$ – операторы i-й проекции ($i = x, y, z$) спина на первой или второй цепочке в узле n, θ – параметр взаимодействия, E_f – энергия "ферромагнитного" состояния. Третий член в гамильтониане (1) имеет необычную форму. Его происхождение может быть связано со спин-орбитальным взаимодействием, когда при достаточно низких температурах орбитальное движение заморожено. В этом случае θ пропорционально $\langle\epsilon^{ikl}(l^i_{1,n} - l^i_{2,n+1})l^k_{1,n+1}l^l_{2,n}\rangle$, где $l^i_{1,2,n}$ – оператор i-й проекции орбитального момента электрона, а скобки означают усреднение. Из выражения (1) видно, что третий член нарушает T и P симметрии в отдельности, тогда как TP симметрия сохраняется. Только замена 1 и 2 и $(n+1)$ на $(n-1)$ и наоборот не меняет гамильтониан. Структуру третьего члена можно понять в длинноволновом пределе. Если $\mathbf{n}$ – плотность спина ($\mathbf{n}^2 = 1$), то действие третьего слагаемого аналогично (в фазе с нулевым магнитным моментом)

$$I_0 = (\theta/2\pi)\int \epsilon^{ikl}\epsilon_{\mu\nu}n^i\partial_\mu n^k\partial_\nu n^l d^2x, \qquad \mu,\nu = 1,2. \tag{2}$$

Формула (2) есть определение топологического (нетеровского) заряда для кирального поля $\mathbf{n}$, или временная компонента сохраняющегося топологического тока. Два $\mathbf{n}$-поля можно непрерывно деформировать одно в другое только если $I_{0,1} = I_{0,2}$ [12]. Известно, что в классике (I_0/θ) – целое число [12], это число инстантонов в системе. В другом представлении $\mathbf{n}$-поля можно легко узнать в третьем слагаемом аналог члена Черна – Саймонса [7], специфичного для случая $(2+1)$-мерных систем. Отметим, что для $(1+1)$ или $(3+1)$ нельзя построить сохраняющегося скаляра или псевдоскаляра со свойствами топологического заряда, например для $(3+1)$ имеем вектор I_α вместо I_0, и можем построить инвариант Хопфа, принимающий только целые значения [12]. I_0 для $(2+1)$ есть характеристика класса гомотопии $\pi_2(S^2) = Z$ [13]. Распределение поля топологически нетривиально, если $\pi_2(S^2) \neq 0$. Это слагаемое есть полная временная производная $\partial_0 I_0 = 0$ [14], и поэтому не меняет классические уравнения движения.

Заметим, что с классической точки зрения в системе с гамильтонианом (1) имеет место фрустрация. Двухцепочечные квантовые спиновые модели представляют и практический интерес. Недавно был найден ряд веществ с узельными спином 1/2 и с рассмотренным выше "треугольным" спин-спиновым взаимодействием [15].

Уравнения анзаца Бете для быстрот λ имеют вид [16]

$$\frac{\lambda_j^N(\lambda_j+\theta)^N}{(\lambda_j+i)^N(\lambda_j+\theta+i)^N} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M}\frac{\lambda_k-\lambda_j+i}{\lambda_k-\lambda_j-i}, \qquad j = 1,2,\ldots M; \tag{3}$$

N – число узлов в каждой цепочке, M – число спинов вниз. Собственное значение гамильтониана равно

$$E = 2\sum_{k=1}^{M}\left[\frac{1}{\lambda_k(\lambda_k+i)} + \frac{1}{(\lambda_k+\theta)(\lambda_k+\theta+i)}\right]. \tag{4}$$

Найдя значение λ_j из (3) и подставив их в (4), мы решим задачу Шредингера для любых M. В простом случае нулевого магнитного момента системы имеем для основного состояния

$$E_0 = -2N \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [1 + \cos(\omega\theta)][1 + \exp|\omega|]^{-1}. \tag{5}$$

Формула (5) есть четная функция параметра киральности θ (определим спиновую киральность системы как ненулевое среднее от оператора $\sum_n \epsilon^{ikl}(e^i_{1,n} - -e^i_{2,n+1})e^k_{1,n+1}e^l_{2,n})$. В тоже время, как и ожидалось из классического предельного случая, энергия основного состояния оказалась периодичной по параметру θ. В статье [16] мы назвали такое состояние антикиральным.

При включении слабого магнитного поля $h \ll 8(I+2\theta^2)/(1+4\theta^2)$, используя метод Винера–Хопфа, имеем

$$E_0 = E_0|_{h=0} - hm^z N + N(\pi m^z/2)^2 = E_0|_{h=0} - N(h-\pi)^2. \tag{6}$$

Для сильных внешних магнитных полей $h > 8(I+2\theta^2)/(1+4\theta^2)$ энергия основного "ферромагнитного" состояния равна $E = -4Nh$. Как видно из (6), ненулевое магнитное поле, меньшее критического значения, не меняет антикиральности системы, то есть числа инстантонов и антиинстантонов. Для простейшего дублетного возбуждения, следуя [17], имеем

$$E_d = E_0 + \pi\{\mathrm{sech}(\pi\lambda_0) + \mathrm{sech}(\pi(\lambda_0 + \theta)). \tag{7}$$

Два дублета могут формировать синглет или триплет [17]. Легко убедиться, что дублетное состояние бесщелевое. То же справедливо и для синглета и триплета. Вопрос о щели спиновых возбуждений $2D$ спиновой $1/2$ системы имеет принципиальное значение для понимания природы сверхпроводящего и антиферромагнитного упорядочений в металлооксидах [1–6]. Здесь мы показали, что возбуждения системы с гамильтонианом (1) бесщелевые. Но гамильтониан содержит топологические слагаемые с θ-вакуумом [7]. Ситуация аналогична картине Халдейна $1D$ антиферромагнетика[18, 19]. Халдейн предположил, что цепочки с целым узельным спином имеют щель в спектре, тогда как в цепочках с полуцелым спином в узлах возбуждения бесщелевые. Но разница в описании систем с целым и полуцелым узельным спином именно и состоит в слагаемом с θ-вакуумом: оно не меняет классические уравнения движения, но существенно меняет квантовые свойства системы. Для систем с полуцелыми узельными спинами $\theta \neq 0$, и это приводит к исчезновению щели [18]. Используя те же, что и Халдейн, аргументы, можно предположить, что в нашем случае бесщелевое поведение возбуждений системы связано с ненулевым θ-членом в гамильтониане (1) (заметим, что пространственная анизотропия спин-спинового взаимодействия, пропорциональная четной степени θ, не приводит в отсутствие топологического члена к занулению щели, если действовать, например, аналогично работе [19]). Поэтому можно предположить, что двумерная квантовая фрустрированная спиновая система с узельным спином $1/2$, но без киральной добавки в гамильтониане, будет иметь щелевые элементарные возбуждения. Эти спиновые щели могут быть источником антиферромагнитного "квазиупорядочения" [2–6], и двумерные сильно коррелированные системы могут проявлять сверхпроводящие свойства [8], как в картине Лафлина дробного эффекта Холла [20]. Заметим, что действие магнитного поля, перпендикулярного плоскости, проходящей через цепочки, также аналогично топологическому слагаемому, см., например, [21] (это слагаемое – эффективный поверхностный член в спиновом пространстве); в этом случае θ-вакуум в исследуемой модели аналогичен статистическому полю энионов [7], при значениях внешнего поля, компенсирующих внутренний θ-вакуум, возбуждения системы щелевые, а в остальных случаях – бесщелевые, что соответствует картине дробного эффекта Холла [7]. Другим основанием для нашего предположения являются точные классические решения для двумерного магнетика [21], где возбуждения массивны, см. также [22], где киральные уравнения анзаца Бете похожи на (2), и модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена [23], в которой вследствие θ-вакуумного члена возбуждения бесщелевые.

Дублетные возбуждения меняют киральные свойства системы, так как выражение (7) не четно по θ. Однако анализ показывает, что вклад в термодинамику эти возбуждения (спиноны) дают парами с разными знаками киральности (как и возбуждения, несущие более высокий спин). Это, естественно, согласуется с тем, что топологический заряд системы не меняется ни при включении ненулевого внешнего поля, ни при ненулевой температуре.

Мы подробно разобрали случай двух спиновых цепочек. Обобщим рассмотрение на произвольное их число. Для L (четного) спиновых 1/2 цепочек для трансфер-матрицы и гамильтониана имеем

$$\mathrm{T}(\lambda) = T(\lambda - \theta_1)T(\lambda - \theta_2)...T(\lambda - \theta_L), \tag{8}$$

$$H = -E_f + \sum_{r=1}^{L} \sum_{n} \{P_{s_{r,n}s_{r+1,n}} + (\prod_{\text{все}} \theta_{ik})P_{s_{r,n}s_{r,n+1}} + \\ + \sum_{p<q} \theta_{pq}^{-1} (\prod_{\text{все}} \theta_{ik})[P_{s_{p,n}s_{q,n}}, (P_{s_{p,n}s_{p,n+1}} + P_{s_{q,n}s_{q,n+1}})] + ...), \tag{9}$$

где P – оператор перестановки; в первом слагаемом нужно заменить член $P_{s_{L.n}s_{1,n}}$ на $P_{s_{L.n}s_{1,n+1}}$, что соответствует скрученным вокруг тора граничным условиям; $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$, $\theta_{L+1k} = \theta_{1,k}$; произведения берутся по всем i и k, а $T(\lambda)$ – стандартная трансфер-матрица одной цепочки спина 1/2 [10]. Заметим, что при $\theta_{ik} \to \infty$ мы имеем дело с L невзаимодействующими цепочками из N спинов, а при $\theta_{ik} = 0$ – с цепочкой из LN спинов. Мы опустили в (9) члены более высокого порядка с коммутаторами. Все они, как и третье слагаемое, имеют ту же природу, что и для случая двух цепочек, так как они не меняют классических уравнений движения и являются топологическими зарядами на решетке более высокого по спиновым операторам порядка. Опущенные члены удовлетворяют дальнодействующей природе слагаемого Черна–Саймонса в двумерных системах [7]. Энергия системы с M спинами вниз равна

$$E = \sum_{r=1}^{L} \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{(\lambda_k + \theta_{r1})(\lambda_k + \theta_{r1} + i)}, \tag{10}$$

а λ_k находятся из системы уравнений

$$\prod_{r=1}^{L} = \frac{\lambda_j^N (\lambda_j + \theta_{r1})^N}{(\lambda_j + i)^N (\lambda_j + \theta_{r1} + i)^N} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j - i}, \qquad j = 1, 2...M \tag{11}$$

В пределе $N \to \infty$ имеем для основного состояния

$$E_0 = -\sum_{r=2}^{L} N \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |1 - \exp(i\omega\theta_{r1}|^2 [1 + \exp|\omega|]^{-1}, \qquad (12)$$

причем для такого состояния $M = LN/2$. Аналогично выражению (7) можно получить формулу для спинонного возбуждения

$$E_d = E_0 + \pi \sum_{r=1}^{L} \mathrm{sech}(\pi(\lambda_0 + \theta_{r1})).$$

Лишь пары этих возбуждений с противоположными киральностями, как и для двух цепочек, дают вклад в термодинамику, и двумерная квантовая система с гамильтонианом (9) антикиральна, хотя каждое из спинонных возбуждений несет ненулевую киральность (ненулевой топологический заряд). Возбуждения и в этом случае бесщелевые. Однако, как и в случае двух цепочек, в гамильтониане системы присутствуют нетривиальные топологические слагаемые, нарушающие T и P симметрию системы, которые, как и ранее, могут служить причиной отсутствия щели. Вновь, аналогично Халдейну, можно предположить, что эффективно двумерный фрустрированный квантовый антиферромагнетик с узельными спинами 1/2 имеет щелевые возбуждения.

Таким образом, в работе приведена спиновая квантовая фрустрированная эффективно двумерная система, гамильтониан которой нарушает T и P симметрии, допускающая точное решение, в которой имеет место спиновая антикиральность. Показано, что дублетное возбуждение этой системы, аналогичное классическим инстантонам, несет ненулевую спиновую киральность, но вклад в термодинамику такие возбуждения дают только парами с противоположной киральностью. Мы предполагаем, что именно топологически нетривиальные слагаемые в гамильтониане приводят к бесщелевому поведению возбуждений в рассмотренной системе. Мы полагаем также, что для квантовых двумерных спиновых 1/2 фрустрированных систем без нарушения T и P симметрий элементарные возбуждения имеют щель.

Автор благодарен B.Doucot, Yu Lu, S.M.Girvin, В.Г.Дринфельду, И.В.Криве и А.А.Логинову за обсуждение работы.

---

1. P.V.Anderson, Science **235**, 1196 (1987).
2. P.W.Anderson, G.Bascaran, Z.Zou, and T.Hsu, Phys. Rev. Lett. **58**, 2790 (1987).
3. S.Kivelson, D.S.Rokhsar, and J.P.Sethna, Phys. Rev. B **35**, 8865 (1987).
4. G.Baskaran, A.Zou, and P.W.Anderson, Sol. St. Comm. **63**, 973 (1987).
5. G.Kotlyar, Phys. Rev. B **37**, 3664 (1988).
6. I.Affleck, and B.J.Marston, Phys. Rev. B **37**, 3774 (1988).
7. F.Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity, World Scientific, Singapore, 1990.
8. Y.-H.Chen, F.Wilczek, E.Witten, and B.I.Halperin, Int. J. Mod. Phys. B **3**, 1001 (1989).
9. X.G.Wen, F.Wilczek, and A.Zee, Phys. Rev. B **39**, 11413 (1989).
10. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фадеев, УМН **34**, 13 (1979).
11. А.А.Белавин, А.М.Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
12. А.М.Переломов, УФН **134**, 577 (1981).
13. Р.Раджараман, Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
14. A.P.Balachandran, G.Landi, and B.Rai, Int J. Mod. Phys. A **5**, 4501 (1990).

15. J.Curely, R.Georges, M.Drillon, et al., Phys. Rev. B **46**, 3527 (1992).
16. V.Yu.Popkov and A.A.Zvyagin, Phys. Lett. A **175**, 295 (1993).
17. L.D.Faddeev and L.A.Takhtajan, Phys. Lett. A **85**, 375 (1981).
18. F.D.M.Haldane, Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
19. I.Affeck, J. Phys.: Condens, MAtt. **1**, 3047 (1989).
20. R.B.Laughlin, Science **242**, 525 (1988).
21. П.Б.Вигман, Письма в ЖЭТФ **41**, 79 (1985).
22. A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B **131**, 121 (1983).
23. A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B **141**, 223 (1984).