Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.9, стр.629 - 632 © 1994г. 10 ноября

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НА КОМБИНАЦИОННЫХ ЧАСТОТАХ В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С.Н.Власов, В.И.Таланов[1)]

Институт прикладной физики РАН

603600 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 1994 г.

Показано, что при распространении электромагнитных волн частоты ω_0 в среде с нелинейной поляризацией степени $2N+1$ может иметь место неустойчивость на комбинационных частотах Ω_1 и Ω_2, удовлетворяющих условию $2M\omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2$, M – целое число $\leq N$. Определены условия появления этой неустойчивости.

При распространении волн в нелинейных диспергирующих средах в определенных условиях имеет место модуляционная неустойчивость огибающих волн [1]. В частности, электромагнитные волны с частотой ω_0 в диэлектрике с дисперсией и кубичной безинерционной поляризацией $P = \alpha_3 E^3$, где E – напряженность электрического поля, неустойчивы относительно возмущений на частотах

$$\omega_0 \pm \Omega, \qquad |\Omega| \ll \omega_0, \tag{1}$$

где $\Omega^2 \cong (\delta\epsilon_3\omega_b^2)$, $1/\omega_b^2 = -(\partial^2 k/\partial\omega^2)/k$, $\delta\epsilon_3 \cong 12\pi\alpha_3|E|^2$, $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_d}$ – модуль волнового вектора, c – скорость света, ϵ_d – линейная часть диэлектрической проницаемости, если знаки дисперсии, которую мы будем описывать величиной $(\partial^2 k/\partial\omega^2)/k = -1/\omega_b^2$, и коэффициента нелинейности α_3 не совпадают. В данной работе показано, что если в поляризации имеются члены более высокого порядка, $P \cong \alpha_N E^{2N+1}$, неустойчивость может возникнуть на комбинационных частотах Ω_1 и Ω_2, удовлетворяющих условию

$$2M\omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2, \qquad M \text{ – целое число } \leq N. \tag{2}$$

Частоты волн Ω_1 и Ω_2 могут отличаться друг от друга достаточно сильно. Эффективность их взаимодействия с волной накачки зависит от дисперсии и нелинейности среды. В том случае, когда Ω_1 и Ω_2 мало отличаются от частот $\omega_M = M\omega_0$:

$$\Omega_1 = M\omega_0 + \Omega_p, \qquad \Omega_2 = M\omega_0 - \Omega_p, \tag{3}$$

$$|\Omega_p| \ll M\omega_o, \tag{4}$$

для исследований может быть применен метод медленноменяющихся амплитуд. В этом случае условия появления модуляционной неустойчивости на комбинационных частотах могут быть представлены более просто.

Рассмотрим распространение скалярной волны в нелинейной среде, описываемой уравнением

$$\partial^2 E/\partial z^2 - 1/c^2(\partial^2 E/\partial t^2 + 4\pi\partial^2 P/\partial t^2) = 0, \tag{5}$$

[1)]e-mail: TALAN@APPL.NNOV.SU

где поляризация среды имеет вид $P = \alpha_d E + \alpha_N E^{2N+1}$. В такой среде в случае достаточно сильной дисперсии, когда прямая генерация гармоник пренебрежимо мала, может распространяться волна $E = U = Ve^{i(\omega_0 t - hz)} +$ к.с. с амплитудой V и постоянной распространения $h^2 = k_d^2(1 + \delta\epsilon_N)$. Величина $\delta\epsilon_N = 4\pi\alpha_N |V|^{2N} C_N^{2N+1}/\epsilon_d$, $C_N^{2N+1} = (2N+1)!/\{N!(N+1)!\}$, описывает изменение проницаемости на несущей частоте, к.с. означает комплексно сопряженную величину. В дальнейшем амплитуду V будем считать действительной.

Будем искать возмущенное решение (5) в виде $E = U + u$, где возмущение u будем считать малым. Пусть $u = u_M e^{i(M\omega_0 t - hz)} +$ к.с., где u_M – медленно меняющиеся, согласно (4), функции. Для u_M запишем параболические уравнения

$$-2ih_M \partial u_M/\partial z - (k_{dM}\partial^2 k_{dM}/\partial\omega^2)\partial^2 u_M/\partial\tau^2 + (k_{dM}^2 - h_M^2)u_M + A_p u_M + B_p u_M^* = 0, \quad (6)$$

где $h_M = Mh$, k_{dM} – волновой вектор в линейной среде на частоте ω_M, $A_p = 4\pi\alpha_N\omega_M^2 V^{2N}(2N+1)!/(N!)^2$, $B_p = 4\pi\alpha_N\omega_M^2 V^{2M}(2N+1)!/\{(N-M)!(N+M)!\}$, $\tau = t - z/v_M$, v_M – групповая скорость на частоте ω_M. Будем искать решение (6) в виде $u_M = w_m e^{i\Omega_p\tau + Hz}$. Для определения постоянных распространения $G = H/h_M$ имеем дисперсионное уравнение

$$4G^2 + (\Delta + \Omega^2 + A)^2 - B^2 = 0, \quad (7)$$

где $\Delta = k_{dM}^2/h_M^2 - 1$ – расстройка на частоте ω_M, $\Omega^2 = \Omega_p^2(k_{dM}\partial^2 k_{dM}/\partial\omega^2)/h_M^2$ – квадрат безразмерной частоты, $A = A_p/h_M^2 = (N+1)\delta\epsilon_N/(\epsilon_d[1 + \delta\epsilon_N])$, $B = B_p/h_M^2 = [N!(N+1)!/(N-M)!(N+M)!]\delta\epsilon_N/\{\epsilon_d[1 + \delta\epsilon_N]\}$. Если в расстройке $\Delta = [k_{dM}^2(M\omega) - M^2 k_d^2(\omega) - M^2 k_d^2 \delta\epsilon_N]/h_M^2$ нелинейный член $M^2 k_d^2 \delta\epsilon_N$ существенно превосходит линейный $k_{dM}^2(M\omega) - M^2 k_d^2(\omega)$, то при условии разных знаков дисперсии $(\partial^2 k/\partial\omega^2)/k$ и нелинейности α_N имеем вблизи частоты ω_M неустойчивость с максимальным инкрементом

$$H = h_M B/2 \cong MhB/2 \quad (8)$$

на частоте отстройки

$$\Omega_p \approx (N\delta\epsilon_N \Omega_{0M})^{1/2},$$

где ω_{0M} – значение величины $[(k_{dM}\partial^2 k_{dM}/\partial\omega^2)/h_M^2]^{-1/2}$ на частоте ω_M.

С увеличением показателя N инкременты и полосы частот увеличиваются, причем число частот M, вблизи которых имеет место неустойчивость, равно N в согласии с квантовой интерпретацией равенства (2) о порождении из $2N$ фотонов частоты ω_0 фотонов соответственно с частотами $2M\omega_0 + \Omega_p$ и $2M\omega_0 - \Omega_p$. Инкременты на более высоких частотах могут превосходить инкременты на низких из-за наличия множителя M в (8).

В случае не степенной, а произвольной зависимости поляризации от поля при рассмотрении неустойчивости необходимо разложить поляризацию в ряд по степеням поля E и учесть, что на неустойчивость вблизи частоты ω_M влияют все члены с $N > M$.

Пусть нелинейность описывается двумя членами с разными знаками нелинейности:

$$P = \alpha_3 E^3 - \alpha_N E^{2N+1}. \quad (9)$$

Тогда вблизи несущей частоты имеем

$$\delta\epsilon = 3\alpha_3 |E|^2 - \frac{(2N+1)!}{N!(N+1)!}\alpha_N |E|^{2N} = \delta\epsilon_3 - \delta\epsilon_N. \quad (10)$$

$$A = 2\delta\epsilon_3 - (N+1)\delta\epsilon_N, \qquad B = \delta\epsilon_3 - N\delta\epsilon_N. \tag{11}$$

Функция (9) при $N \gg 1$ описывает быстрое изменение $\epsilon(|E|^2)$, характерное для многофотонных процессов [2]. Заметим, что знаки $\delta\epsilon$ из (10) и коэффициента A из (11) из-за наличия множителя $N+1$ во втором члене у A могут отличаться. Благодаря этому модуляционная неустойчивость на основной частоте может иметь место даже в том случае, если $\delta\epsilon(\partial^2 k/\partial\omega^2) > 0$, что невозможно в случае кубичной нелинейности. Для остальных комбинационных частот вблизи ω_M с $M \geq 2$ коэффициенты A и B определяются только членом с E^{2N+1}.

На основе изложенной теории может быть интерпретировано сверхуширение спектров, наблюдающееся при самофокусировке коротких импульсов света в твердых телах [3–9]. Оно может быть объяснено как развитие модуляционной неустойчивости на комбинационных частотах при нелинейности типа (9). Если коэффициент α_N достаточно мал и $N \gg 1$, то в значительном интервале изменения интенсивности будет преобладать кубичная нелинейность и наблюдаться самофокусировка пучка. Знак дисперсии в стеклах таков, что модуляционная неустойчивость при кубичной нелинейности не имеет места. Однако при нелинейности (9) с ростом интенсивности поле в фокальной точке ограничивается, знак производной нелинейности по $|E|^2$ меняется и при этом возникает модуляционная неустойчивость на комбинационных частотах с инкрементом (8) и характерными частотами отстройки от частот ω_M:

$$\Omega^2/(M\omega_0)^2 \approx \delta\epsilon N/\{M\omega_0[2dn(\omega)/d\omega + \omega d^2n/d\omega^2]\}, \tag{12}$$

где $dn(\omega)/d\omega$ и $d^2n(\omega)/d\omega^2$, соответственно, первая и вторая производные линейной части показателя преломления $n = \sqrt{\epsilon_d}$ по частоте ω_M. Дисперсией нелинейных коэффициентов мы пренебрегаем, предполагая, что $\delta\epsilon \approx |\delta\epsilon_3| \approx |\delta\epsilon_N| \ll 1$. В прозрачных стеклах $dn(\omega)/d\omega$ и $d^2n/d\omega^2$ имеют порядок $dn(\omega)/d\omega \approx 0,05/\omega$ и $d^2n/d\omega^2 = 0,01/\omega^2$ [9]. При этих условиях относительная расстройка $\Omega^2/\omega^2 \approx 16\delta\epsilon N M^2$, откуда видно, что при величинах $\delta\epsilon \approx 10^{-2}$ и даже небольших $N \geq 3$, частоты отстройки имеют порядок несущей. Из выражения для инкремента (8) следует, что при ширине пучка в области с большой интенсивностью вблизи точки схлопывания $2a_c \approx 10\lambda$ и протяженности ее $L \approx k_d a_c^2 \approx 150\lambda$ полный инкремент достигает значений, необходимых для нарастания полей гармоник до измеримых значений из шумов.

Таким образом, предположение о нелинейности типа (9), наряду с ограничением поля в фокальной точке, приводит к выводу о появлении излучения в значительной части видимого диапазона.

В заключение заметим, что исследование коллапса с различными степенями нелинейности также требует учета модуляционной неустойчивости, имеющей место вблизи частот ω_M, если нелинейность имеет высокую степень [11].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-02-16166).

---

1. В.И.Беспалов, А.Г.Литвак, В.И.Таланов, Сб. Нелинейная оптика, Новосибирск: Наука, 1968, с.428.
2. Н.Б.Делоне, Взаимодействие лазерного излучения с веществом, М.: Наука, 1989.
3. Н.Г.Бондаренко, И.В.Еремина, В.И.Таланов, Письма в ЖЭТФ **12**, 125 (1970).
4. R.R.Alfano and S.L.Shapiro, Phys. Rev. Letts. **24**, 592 (1970).
5. A.Penzkofer and W.Kaizer, Opt. and Quant. Electron. **9**, 315 (1977).

6. В.Н.Луговой, А.М.Прохоров, УФН **111**, 203 (1973).
7. В.А.Петрищев, В.И.Таланов, Сб. Квантовая электроника N.6, 35 (1971), М.: Сов. Радио.
8. N.Blombergen, Opt. Commun's **8**, 235 (1973).
9. Н.Г.Бондаренко, И.В.Еремина, А.И.Макаров, Сб. Квантовая электроника, N.33, 89 (1987) Киев, Наукова Думка.
10. М.Борн, Э.Вольф, Основы оптики, М.: Наука, 1970 (M.Born, E.Wolf, Principle of Optics, 1964, Pergamon Press, Oxford-London-Edinburg-New York-Paris-Frankfurt).
11. K.Rypdal and J.J.Rusmussen, Physika scripta **33**, 481 (1986).