Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 10, стр. 486 – 489 *20 мая 1983 г.*

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В АНГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ВНЕШНЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

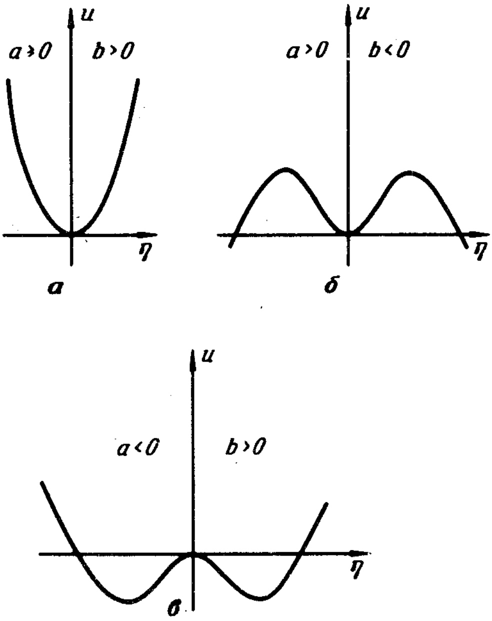
Ю.Д.Калафати, Б.А.Малахов

Показано, что в ангармонических системах с симметричным потенциалом, возбуждаемых периодической силой, необходимым условием возникновения динамического хаоса (ДХ) через удвоение периода является спонтанное нарушение симметрии. Обсуждается природа низкочастотного пика, появляющегося в фурье-спектре при возникновении ДХ.

Концепция динамического хаоса – хаотического поведения конечномерных динамических систем – все шире проникает в различные разделы физики. Особый интерес вызывают обнаруженные недавно универсальные свойства механизма возникновения ДХ через удвоение периода [1]. Большое количество работ [2–4] посвящено исследованию возникновения ДХ через удвоение периода в системах, поведение которых описывается уравнением:

$$\ddot{\eta} + \gamma\dot{\eta} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = B\cos\omega t\,, \qquad (1)$$

где $U = \frac{1}{2}a\eta^2 + \frac{1}{4}b\eta^4$ – потенциал; γ – коэффициент трения: B и ω соответственно амплитуда и частота внешней силы; a и b – действительные числа. Уравнение (1) описывает поведение ангармонического осциллятора под действием периодической силы: случай а) $a > 0, b > 0$ (рис. 1,а) и случай б) $a > 0, b < 0$ (рис. 1, б), а также динамику параметра порядка вблизи точки фазового перехода второго рода при наличии одной мягкой моды: случай в) $a < 0, b > 0$ (рис. 1,в).



Цель данной работы – показать, что возникновение ДХ в системах, описываемых уравнением (1) для всех трех случаев а) – в) имеет общую закономерность, а именно, удвоение периода и ДХ возникают там, где происходит спонтанное нарушение симметрии (СНС). Определим теперь, что мы понимаем под СНС в ангармонических системах, возбуждаемых периодической силой. Для этого введем величину

$$<\eta> = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \eta(\xi) d\xi, \tag{2}$$

которая для периодических решений совпадает с константой в разложении решения в ряд Фурье

$$\eta(t) = <\eta> + \frac{1}{2} \sum_k [\eta_k \exp(i\phi k t) + \eta_k^* \exp(-i\phi k t)], \tag{3}$$

где $T = 2\pi / \phi$ – период решения $\eta(t)$; $\phi = \frac{m}{n}\omega$, m и n – целые числа. Исследуя периодические решения уравнения (1) на фазовой плоскости $\eta, \dot\eta$, можно убедиться, что при $<\eta> = 0$ решения (как и само уравнение (1)) инвариантны относительно симметрии S: $\eta' = -\eta$, $\dot\eta' = -\dot\eta$, $t' = t + \pi$, а при $<\eta> \neq 0$ это уже не так. Поэтому решения с $<\eta> = 0$ назовем симметричными, с $<\eta> \neq 0$ – несимметричными, а величину $<\eta>$ – параметром порядка. Под СНС будем понимать переход из-за потери устойчивости от симметричного решения в устойчивое несимметричное решение (или наоборот) при изменении параметров B или ω.

Важное свойство СНС при переходе от симметричного решения к несимметричному – возрастание амплитуды четных гармоник от нуля до конечной величины. В работе [4] при исследовании случая а) заметили появление четных гармоник перед возникновением последовательности удвоения и ДХ, более того подчеркнули универсальность этого явления, но не связали его с СНС. Покажем, что появление четных гармоник, действительно, связано с переходом к несимметричному решению. Подставим (3) в (1) и получим уравнение для $<\eta>$:

$$a<\eta>+b<\eta>^3+\frac{3}{2}b<\eta>\sum_k|\eta_k|^2+\frac{3}{8}b\sum_{k,l}(\eta_k\eta_l\eta^*_{k+l}+\eta^*_k\eta^*_l\eta_{k+l})=0. \quad (4)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением периодического решения с периодом внешней силы. Тогда каждое слагаемое последнего члена в уравнении (4) содержит четную гармонику. Если амплитуды четных гармоник равны нулю, то, например, для случая а) уравнение (4) имеет только решение $<\eta>=0$. Появление несимметричных решений возможно только, если амплитуды четных гармоник отличны от нуля. Для случаев в) и б) амплитуды четных гармоник также пропорциональны $<\eta>$.

Исследуя устойчивость симметричных периодических решений, в фурье-спектре которых содержатся только нечетные гармоники и $<\eta>=0$, можно убедиться, что неустойчивость относительно удвоения периода отсутствует. Покажем, что последовательность удвоения периода возникает в области устойчивых несимметричных решений при уменьшении величины $<\eta>$. Рассмотрим случай в). Этот случай выделен тем, что СНС можно изучать уже в приближении одной гармоники. Для случаев а) и б) обнаружить СНС можно только при учете нескольких гармоник. Уравнение для $<\eta>$ и η_1 в случае в) при $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ $\omega=1$ следующие:

$$<\eta>(<\eta>^2-1+3|\eta_1|^2)=0, \quad (5)$$

$$|\eta_1|^2\left[\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}<\eta>^2+\frac{3}{8}|\eta_1|^2\right)^2+\gamma^2\right]=B^2. \quad (6)$$

При $B \ll 1$ уравнения (5), (6) имеют два устойчивых периодических решения с $<\eta>\neq 0$, локализованные в каждой из потенциальных ям, и неустойчивые решения с $<\eta>=0$. С увеличением B величина $<\eta>$ стремится к нулю. При $B\approx 1$ несимметричные решения исчезают, а симметричные – становятся устойчивыми, т.е. происходит СНС. Исследуем устойчивость несимметричных колебаний, период которых равен 2π

$$\delta\ddot{\eta}+\gamma\delta\dot{\eta}+\left[<\eta>^2-3<\eta>\eta_1\cos(t+\beta_1)-\frac{3}{4}|\eta_1|^2\cos(2t+\beta_2)\right]\delta\eta=0, \quad (7)$$

где $\delta\eta$ – малое отклонение от периодического решения; β_1 и β_2 – фазы колебаний. Уравнение (7) аналогично уравнению для линейного маятника с собственной частотой $<\eta>$, который параметрически накачивается силой с частотой равной единице. Уменьшение $<\eta>$ с увеличением B приводит к параметрической неустойчивости, т.е. к возрастанию флуктуаций с частотой $1/2$. Это в свою очередь приводит к появлению колебания с удвоенным периодом. Последующие удвоения периода также связаны с параметрической неустойчивостью. Таким образом, непосредственно в области СНС следует ожидать возникновения ДХ. Это положение проверялось нами с помощью ЭВМ.

Для $\gamma \lesssim 0,1$, действительно, переход от несимметричных решений к симметричным сопровождается возникновением ДХ. Например, при $\gamma=0,1$ с увеличением B в каждой из потенциальных ям наблюдаются несимметричные колебания с периодами 1, 2, 4, 8, 16, а затем при $B=0,182$ возникает ДХ. Решение, соответствующее ДХ, симметрично, т.е. согласно определению (2), $<\eta>=0$ (рис. 2), а амплитуды четных гармоник в фурье-спектре (рис. 3) скачком уменьшились практически до нуля. Резкий пик на низких частотах является важной чертой, характеризующей ДХ. Его появление связано, по-видимому, со случайными блужданиями между двумя несимметричными решениями, образовавшимися в результате СНС [5]. Дальнейшее увеличение параметра B после области ДХ приводит к симметричным колебаниям с периодом 3, 1.

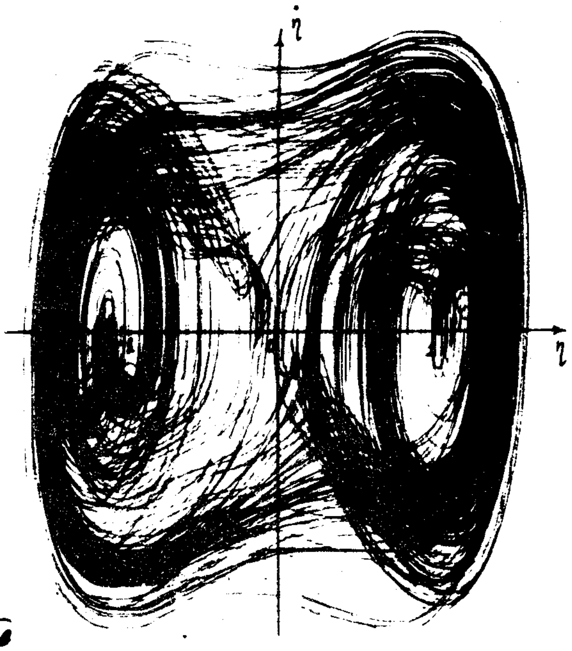


Рис. 2

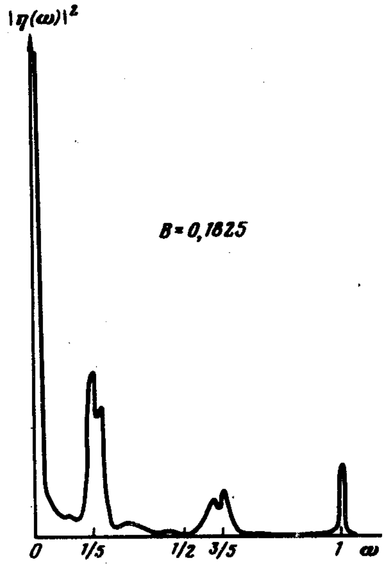


Рис. 3

При $\gamma \gtrsim 1$ СНС не сопровождается возникновением ДХ.

Выводы: 1) в ангармонических системах с симметричным потенциалом, возбуждаемых периодической силой, необходимым условием возникновения ДХ является СНС, причем последовательность бифуркаций удвоения периода происходит при переходе от несимметричных решений к симметричным; 2) возникновение ДХ сопровождается появлением в фурье-спектре низкочастотного пика; 3) полученные результаты представляют интерес при исследовании динамики фазовых переходов.

Авторы благодарят Я.Г.Синая и С.Л.Зиглина за полезные обсуждения.

Литература

1. *Feigenbaum M.J.* J. Stat. Phys., 1978, **19**, 25.
2. *Hubberman B.A., Crutchield J.P.* Phys. Rev. Lett., 1979, **43**, 1743.
3. *Moon F.C., Holmes P.J.* J. of Sound and Vibration, 1979, **65**, 275.
4. *Novak S., Frehlich R.* Phys. Rev., 1982, **26A**, 3660.
5. *Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 1217.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 апреля 1983 г.