Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 10, стр. 509 – 512 20 мая 1983 г.

АКСИАЛЬНАЯ И КОНФОРМНАЯ АНОМАЛИИ В СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Р.Э.Каллош

Показано, что аксиальная (треугольная) аномалия антисимметричных тензоров отлична от нуля. С учетом этого дано корректное определение аксиальной аномалии, которая в супергравитациях $N=1,\ldots,8$ оказывается равной конформной. При $N\geqslant 3$ обе аномалии исчезают.

1. Известно, что отсутствие аномалий в квантовой теории поля является важным критерием при построении реалистической теории элементарных частиц. В то же время в супергравитации, претендующей на роль единой теории всех фундаментальных взаимодействий, существует проблема: считается, что конформная и аксиальная аномалии в гравитационном поле не образуют мультиплет [1,2] и, в отличие от конформной аномалии [3,2], аксиальная не исчезает в супергравитациях с $N\geqslant 3$ [2]. В настоящей работе будет показано, что эта проблема решается при учете аксиальной аномалии антисимметричного тензора („нотофа" [4]) и при уточнении определения аксиальной аномалии в супергравитации.

2. Аксиальная аномалия антисимметричного тензора.

До сих пор считалось, что аксиальная аномалия бывает только у фермионов, т.е. полей спина 1/2 и 3/2, а у бозонных полей, в том числе и у антисимметричных тензоров, описываемых лагранжианами второго порядка, ее нет [5,2]. Для исследования этого вопроса заметим, что в классической теории поля $A_{[\mu\nu]}$, взаимодействующего с гравитационным полем, имеется сохраняющийся (в силу уравнений движения и дополнительного условия $D^\mu A_{\mu\nu}=0$) аксиальный ток $j^5_\mu = D^\lambda A^*_{\lambda\nu} A_{\mu\nu}$, где $A^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda\delta}A_{\lambda\delta}$. Рассмотрим далее квантовый лагранжиан поля $A_{\mu\nu}$ (в калибровке гармонического типа)

$$\mathcal{L}_{\text{кв}} = -\sqrt{g}\,(D^\mu A^*_{\mu\nu})^2 - \sqrt{g}\,(D^\mu A_{\mu\nu})^2 + \mathcal{L}_{\text{дух}}\,. \tag{1}$$

где духи являются векторными и скалярными частицами. При дуальном преобразовании $A_{\mu\nu}\to A^*_{\mu\nu}$

$$\delta\,\mathcal{L}_{\text{кв}} = -2\sqrt{g}\,D^\mu A^*_{\mu\nu}\,D^\lambda A_{\lambda\nu} \equiv -\sqrt{g}\,D^\mu j^5_{\mu\,\text{кв}}(x) + \frac{\delta S_{\text{кв}}}{\delta A_{\mu\nu}(x)}A^*_{\mu\nu}(x)\,, \tag{2}$$

где

$$j^5_{\mu\,\text{кв}} = D^\lambda A^*_{\lambda\nu}A_{\mu\nu} + D^\lambda A_{\lambda\nu}A^*_{\mu\nu}\,. \tag{3}$$

Далее рассмотрим усредненное тождество (2) $<\delta L(x)>$, где $<F(x)>$ означает $\int dA_{\mu\nu}\,d\Phi_{\text{дух}}\exp\{iS_{\text{кв}}\}F(x)$. Производя в соответствующем функциональном интеграле замену переменных $\delta A_{\mu\nu} = D_\mu\xi_\nu$, получаем тождество Уорда в гравитационном поле

$$< D^\mu A^*_{\mu\nu}(x)\,D^\lambda A_{\lambda\delta}(y) > = 0\,. \tag{4}$$

Выражение $<\dfrac{\delta S_{\text{кв}}}{\delta A_{\mu\nu}(x)}A^*_{\mu\nu}(x)>$ плохо пределено. В результате регуляризации для него получается [1,5]

$$\begin{aligned}
&<\frac{\delta S_{\text{кв}}}{\delta A_{\mu\nu}(x)}A^*_{\mu\nu}(x)> = <A^+_{\mu\nu}\,\Delta^{+\,\mu\nu,\lambda\delta}A^+_{\lambda\delta} - A^-_{\mu\nu}\,\Delta^{-\,\mu\nu,\lambda\delta}A^-_{\lambda\delta}> = \\
&= \sqrt{g}\,(b_4[1,0] - b_4[0,1]) = \frac{\sqrt{g}}{48\pi^2}R^*_{\mu\nu\lambda\delta}R^{\mu\nu\lambda\delta}(x)\,,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $A^{\pm}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \pm A^{*}_{\mu\nu}$, а $\Delta^{\pm} A^{\pm} = 0$ – уравнение в гравитационном поле для самодуальных (+) и антисамодуальных (–) частей поля $A_{\mu\nu}$. Таким образом из (2), (4), (5) следует, что если выполняется *калибровочная инвариантность* по гравитационному полю и по полю $A_{\mu\nu}$ (в виде (4)), то у последнего имеется треугольная аксиальная аномалия вида

$$< D^{\mu} j^{5}_{\mu\ \text{кв}}(x) > = \frac{1}{48\pi^2} R^{*}_{\mu\nu\lambda\delta} R^{\mu\nu\lambda\delta}, \tag{6}$$

где $j^{5}_{\mu\ \text{кв}}$ определено в (3). Уравнение (6) представляет собой новую по сравнению с [5] локальную версию теоремы Рохлина – Тома – Хирцебруха [6], связывающую число $n^{\pm}_{2}$ гармонических (анти) – самодуальных 2-форм с сигнатурой многообразия τ и с числом Понтрягина P

$$n^{+}_{2} - n^{-}_{2} = \tau = P/3 , \ P = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4 x \sqrt{g}\, R^{*}_{\mu\nu\lambda\delta} R^{\mu\nu\lambda\delta}. \tag{7}$$

Связь между (7) и (6) такая же, как между теоремой Атья – Зингера [7] об индексе оператора Дирака и фермионной γ^5 – аномалией [8].

Поле $A_{[\mu\nu\lambda]}$ дает двойной отрицательный (по отношению к $A_{\mu\nu}$) вклад в аксиальную аномалию, т.к. при его квантовании возникают духи $A'_{[\mu\nu]}$, $A_{[\mu\nu]}$.

3. Аксиальная и конформная аномалии в супергравитации.

Исходный пункт в определении аномалий – это вопрос о том, какие преобразования полей изучаются и являются ли соответствующие локальные замены переменных $\phi^{i\,\prime} = \phi^i + \delta\phi^i(x)$ в функциональном интеграле допустимыми. Общая формула для конформно-киральных аномалий некоторого набора полей в гравитационном поле имеет вид

$$\int d\phi^i \exp i \, \{ S [\phi^i, g_{\mu\nu}] \} \frac{\delta S}{\delta\phi^i(x)} \delta\phi^i(x) = \delta f(x) < T^{\mu}_{\mu}(x) > + i\delta g(x) < D_{\mu} j^5 > . \tag{8}$$

Для полей, описываемых приводимым представлением группы Лоренца $\phi[A, B]$, конформно-киральные преобразования имеют вид $\delta\phi[A, B] = (\delta f(x) \pm i\delta g(x))\phi[A, B]$ (+ для $A \geqslant B$, – для $A \leqslant B$). Эти аномалии вычислены в [1], при $R = R_{\mu\nu} = 0$:

$$(-1)^{2(A+B)} < T^{\mu}_{\mu}(x) > = b_4[A, B] + b_4[B, A] \equiv (\alpha_+ + \alpha_-) \frac{1}{32\pi^2} (C^2_+ + C^2_-),$$
$$(-1)^{2(A+B)} < D^{\mu} j^{5}_{\mu}(x) > = b_4[A, B] - b_4[B, A] \equiv (\alpha_+ - \alpha_-) \frac{1}{32\pi^2} (C^2_+ - C^2_-), \tag{9}$$

где $C_{\pm}$ это (анти) – самодуальные части тензора Вейля и

$$\alpha_+[A, B] = \frac{4^{A+B}}{90}[1 - \frac{15}{2}A - \frac{45}{2}A(2A-1)];$$
$$\alpha_-[A, B] = \frac{4^{A+B}}{90}[1 - \frac{15}{2}B - \frac{45}{2}B(2B-1)]. \tag{10}$$

Если далее использовать эти формулы, как это было сделано в [1], просто суммируя аксиальные аномалии отдельных спинорных полей с единичным киральным весом, то (без учета антисимметричных тензоров) получилось бы

$$< D^{\mu} j^{5}_{\mu}(x) > = (21 N_{3/2} - N_{1/2}) \frac{1}{24 \cdot 32\pi^2} (C^2_+ - C^2_-), \tag{11}$$

где $N_{3/2}$ – число гравитино, а $N_{1/2}$ число полей с $s = 1/2$. Эта аномалия не исчезает ни в одной из рассматриваемых сейчас теорий. Ситуация не улучшается и при учете вклада антисимметричных тензоров. Однако при изучении суперсимметричных теорий адекватными являются не конформно-киральные преобразования отдельных представлений группы Лоренца, а соответствующие преобразования для супермультиплетов. Это приводит к модификации выражения для аксиальной аномалии в суперсимметричных теориях.

Будем изучать супермультиплеты $\phi_c[A, B]$, содержащие поля $[A, B]$ и $[A - \frac{1}{2}, B]$, и "двойные" супермультиплеты $\phi_c[A, B]_c$, содержащие поля $[A, B]$, $\left[A - \frac{1}{2}, B\right]$, $\left[A, B - \frac{1}{2}\right]$ и $\left[A - \frac{1}{2}, B - \frac{1}{2}\right]$. Конформно-киральные преобразования для этих супермультиплетов определим так: $\delta\phi_c[A, B]_c = (\delta f(x) \pm i\delta g(x))\phi_c[A, B]_c$ (и аналогично для $\phi_c[A, B]$), где $+$ для $A \geqslant B$, $-$ для $A \leqslant B$. Подчеркнем, что *знак перед $\delta g(x)$ определяется старшими значениями A, B в данном супермультиплете,* что однозначно фиксирует киральные веса отдельных спинорных полей и полей $A_{[\mu\nu]}$ в данном супермультиплете. Для таких преобразований конформно-киральная аномалия, в соответствии с (8), имеет вид

$$(-1)^{2(A+B)} < T^{\mu}_{\mu\, c}[A, B] > = \alpha_{+\,c}[A,B] \frac{1}{32\pi^2}(C_+^2 + C_-^2) = 4^{A+B-1}\left(A - \frac{7}{12}\right)\frac{1}{32\pi^2}(C_+^2 + C_-^2), \quad (12)$$

$$(-1)^{2(A+B)} < D^{\mu} j^5_{\mu\, c}[A, B] > = \alpha_{+\,c}[A, B] \frac{1}{32\pi^2}(C_+^2 - C_-^2) = 4^{A+B-1}\left(A - \frac{7}{12}\right)\frac{1}{32\pi^2}\cdot$$

$$\cdot(C_+^2 - C_-^2), \quad (13)$$

так как

$$\alpha_{-\,c}[A, B] \equiv \alpha_-[A, B] - 2\alpha_-\left[A - \frac{1}{2}, B\right] = 0, \quad (14)$$

и

$$< T^{\mu}_{\mu\, c}[A, B]_c(x) > = < D^{\mu} j^5_{\mu\, c}[A, B]_c(x) > = 0, \quad (15)$$

так как

$$\alpha_{\pm\,c}[A, B]_c \equiv \alpha_\pm[A, B] - 2\alpha_\pm\left[A - \frac{1}{2}, B\right] - 2\alpha_\pm\left[A, B - \frac{1}{2}\right] + 4\alpha_\pm\left[A - \frac{1}{2}, B - \frac{1}{2}\right] = 0. \quad (16)$$

Из (12), (14) следует, что для $\phi_c[A, B]$ конформная и киральная аномалии определяются одним числом, в соответствии с (9), а для $\phi_c[A, B]_c$ обе аномалии исчезают. Расширенные супергравитации описываются в первой петле с помощью некоторого набора из $N = 1$ суперполей $X(x, \theta)$, $\Phi_\alpha(x, \theta)$ (киральных) и $H_{\alpha\dot\alpha}(x, \theta, \bar\theta)$, $\Psi_\alpha(x, \theta, \bar\theta)$, $\Psi_{\dot\alpha}(x, \theta, \bar\theta)$, $V(x, \theta, \bar\theta)$ (общих) [10], которые в компонентах совпадают с описанными выше супермультиплетами $\phi_c[\frac{1}{2}, 0]$, $2\phi_c[1, 0]$ и $\phi_c[1, 1]_c$, $\phi_c[1, \frac{1}{2}]_c$, $\phi_c[\frac{1}{2}, 1]_c$, $\phi_c[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]_c$ соответственно. Из наших результатов (13), (15) следует, что вклад в аксиальную аномалию в гравитационном поле дают только поля $\phi_c[A, B]$, а поля $\phi_c[A, B]_c$ не дают вклада. Таким образом 1-петлевая аксиальная аномалия в расширенной супергравитации имеет вид

$$< D^{\mu} j^5_{\mu}(x) > = \left[N_{c[\frac{1}{2}, 0]} + 10 N_{2c[1, 0]}\right]\frac{1}{24 \cdot 32\pi^2}(C_+^2 - C_-^2), \quad (17)$$

где $N_{c[\frac{1}{2}, 0]}$, $N_{2c[1, 0]}$ – число соответствующих супермультиплетов. Наиболее естественный вариант супергравитации с $N \geqslant 3$ описывается только полями $\phi_c[A, B]_c$ (в суперполевом описании соответствующее компенсирующее суперполе реальное [10]) и поэтому для этих теорий и аксиальная и конформная аномалии равны нулю.

Автор благодарит В.И.Огиевецкого, А.Цейтлина и А.С.Шварца за полезное обсуждение работы.

Литература

1. *Christensen S.M., Duff M.J.* Phys. Lett, 1978, **76B**, 571; Nucl. Phys., 1979, **B154**, 301.
2. *Duff M.J.* In "Superspace and Supergravity", eds. S.W.Hawking and M.Roček, Cambridge Univ. Press 1981; in "Supergravity 81", eds. S.Ferrara and J.G.Taylor, Cambridge Univ. Press, 1982.
3. *Duff M.J., Van Nieuwenhuizen.* P. Phys. Lett, 1980, **94B**, 179; *Nicolai H., Townsend P.K.* Phys. Lett.,1981, **98B**, 257.
4. *Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В.* ЯФ, 1967, 4, 156.
5. *Dowker J.* J. Phys., 1978, **A11**, 347; *Nielsen N.K., Römer H., Schroer B.* Nucl. Phys., 1978, **B136**, 475.
6. *Рохлин В.А.* ДАН СССР 1952, 84, 221; *Thom R.* in "Colloque de topologie", Strasburg, 1952; *Hirzebruch F.* "Topological methods in algebraic geometry", Springer 1956.
7. *Atiyah M.F., Singer I.M.* Bull. Am. Math. Soc. 1963, **69**, 422.
8. *Schwarz A.S.* Phys. Lett., 1977, **67B**, 172.
9. *Ferrara S., Zumino B.* Nucl. Phys., 1975, **B87**, 207.
10. *Grisaru M.T., Siegel W.* Nucl. Phys., 1981, **B187**, 149; 1982, **B201**, 292.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 апреля 1983 г.